Н. В. Бугаевъ.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ АНАЛИЗЪ

и

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

ИЗДАНІЕ ПЕРВОЕ.

Вышло безъ пересмотра г. профессора.

СТУДЕНТЫ

Воисовскій и Шапиро.

МОСКВА.

Университетская типографія, Страстной бульваръ.

1902.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Введеніе въ анализъ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Классификація функцій.

ВВЕДЕНІЕ.

Математика есть наука, изучающая сходства и различія въ области явленій количественнаго измѣненія. Всѣ количества въ математикѣ раздѣляются на *постоянныя* и *перемѣнныя.*

Постоянными называются такія количества, которыя измѣняться не могутъ и обладаютъ вполнѣ опредѣленной величиной; напр., отношеніе окружности круга къ діаметру — π, величина радіуса въ данномъ кругѣ и т. д.; иногда постоянныя количества называются *параметрами.* Самое существенное свойство перемѣнныхъ количествъ—ихъ способность измѣняться; они раздѣляются на *независимыя перемѣнныя*, измѣненіе коихъ произвольно и *зависимыя перемѣнныя*, измѣненіе которыхъ зависитъ отъ измѣненія другихъ количествъ: напр., въ уравненіи; $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+c}$ перемѣнное зависимое есть y. Иногда отъ насъ зависитъ, какое перемѣнное считать независимымъ и какое зависимымъ; независимое перемѣнное называютъ еще *главнымъ перемѣннымъ*, а зависимое— *функціей.*

Функцію независимаго перемѣннаго x символически обозначаютъ—$f(x)$; вмѣсто f употребляютъ также знаки: Φ, φ, ψ, X.... слову „функція" придаютъ двоякое значеніе: или подъ функціей разумѣютъ совокупность тѣхъ дѣйствій, которыя надо произвести надъ главнымъ перемѣннымъ, чтобы получить зависимое, или же числовой результатъ, полученный отъ выполненія этихъ дѣйствій. Знакъ f, F, φ.... называютъ *характеристикой* функціи. Замѣтимъ, что функція есть математическое понятіе, а не сужденіе, въ чемъ ея существенное отличіе отъ уравненія.

§ 1. *Предварительная классификація функцій.*

1) Функціи раздѣляются *по числу перемѣнныхъ* на функціи съ однимъ, двумя и т. д., со многими перемѣнными и соотвѣтственно обозначаются: $f(x)$; $f(x,y)$; $f(x,y, z)$;.....$f(x,y,z.....)$.

2) *По дѣйствіямъ*, необходимымъ для полученія функцій, онѣ раздѣляются на *алгебраическія* и *трансцендентныя*. *Алгебраическими называются такія, надъ перемѣнными которыхъ совершается конечное число алгебраическихъ дѣйствій;* напр.

$$y=\frac{(\lg a+b\sqrt[3]{x})^5}{x^2+3x\operatorname{Sin}a-7}+8\operatorname{arctg}n;\quad y=\frac{x+\sqrt[3]{x+z}}{3x+\sqrt{3}}.$$

Трансцендентныя функціи не могутъ быть выражены конечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій надъ перемѣнными; напр.;

$$\lg x,\ \operatorname{Sin}x,\ \operatorname{Cos}x,\ \operatorname{arc}\operatorname{Sin}x......;$$

но не слѣдуетъ думать, что всякая функція, выраженная безконечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій, — трансцендентна; напр., въ формулѣ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи

$$\frac{a}{1-b}=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots$$

правая часть выражена безконечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій, но она равна агебраической функціи, стоящей въ лѣвой части.

3) *На явныя и неявныя*; если данъ порядокъ дѣйствій, — функція явная, если же зависимость между перемѣнными дана уравненіемъ, то одно изъ нихъ является неявной функціей остальныхъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ порядокъ дѣйствій не данъ.

4) *На прямыя и обратныя*. Положимъ, что $y=\varphi(x)$ и $x=\psi(y)$; тогда функціи φ и ψ обратныя по отношенію другъ къ другу; обыкновенно обратныя функціи обозначаются такъ φ, и φ'; F, F'; ψ, ψ'... и т. д., ихъ отличительное свойство выражается слѣ-

дующимъ образомъ. $\varphi(\psi(x))=x$ т. е., если мы произведемъ надъ перемѣннымъ какія-нибудь дѣйствія, а затѣмъ обратныя, то опять получимъ то же перемѣнное. Примѣры обратныхъ функцій:

$$y=nx^m;\ x=\sqrt[m]{\frac{y}{n}};\ y=\operatorname{Sin}x,\ x=arc\operatorname{Sn}y\ldots\ldots\ldots$$

5) *Однозначныя и многозначныя*. Однозначныя функціи суть тѣ, которыя при какомъ-либо опредѣленномъ значеніи перемѣннаго, имѣютъ одно значеніе; напр., $y=\operatorname{Sin}x$, $y=\operatorname{tg}x$, корень уравненія первой степени и т. д.

Многозначныя имѣютъ нѣсколько значеній; напр. корень уравненія второй степени имѣетъ два значенія, корень уравненія n-ой степени—n значеній, $arc \operatorname{Sin}x$—безконечное число значеній.

6) *Четныя и нечетныя*. Четныя не мѣняютъ ни своей величины, ни знака при замѣнѣ x величиной—x; нечетныя, не измѣняя величины, мѣняютъ знакъ при той же подстановкѣ. Свойства четныхъ функцій выражаются такъ: $f(x)=f(-x)$, нечетныхъ: $f(x)=-f(-x)$.

Примѣры первыхъ: x^2, x^4, $\operatorname{Cos}x$, $x\operatorname{Sin}x$, $\frac{a+5x^2}{\sqrt{1-x^4}}$ и т. п.

Примѣры вторыхъ: x, x^3, Sin, $\operatorname{tg}x$, $\frac{x^3-3x}{1-x^4}$ и т. п.

Существуютъ еще *смѣшанныя* функцій: такъ называются функціи которыя могутъ быть представлены въ видѣ алгебраической суммы четной и нечетной функціи; напр., $x^2+3x^3-7x^4=$ $=(x^2-7x^4)+3x^3$.

Если обозначимъ четную функцію (fonction pair), входящую въ составъ смѣшанной функціи $f(x)$ черезъ $p(x)$ и нечетную (fonction impair) черезъ $i(x)$, то будемъ имѣть $f(x)=p(x)+i(x)$, откуда выводимъ $p(x)=f(x)-i(x)$; $2p(x)=f(x)+\left[p(x)-i(x)\right]$ и, такъ какъ $p(x)-i(x)=f(-x)$, то $p(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$; такимъ же образомъ находимъ: $i(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

7) *Возрастающія и убывающія*. См. отд. II часть I. § 1.

8) *Прерывныя и непрерывныя*. См. отд. II часть I, § 2.

§ 2. Классификація алгебраическихъ функцій. Алгебраическія функціи раздѣляются на *раціональныя* и *ирраціональныя*. Первыя

не содержать дѣйствія извлеченія корня изъ перемѣннаго, а только первыя четыре дѣйствія и возвышеніе въ цѣлую степень напр.;

$$y=\frac{x+5+x^2}{3-x};\ y=\left(\frac{1+x\sqrt{10}-7x\sqrt[3]{3}}{1-x\sqrt{2}}\right)^{11}\ \text{и т. п.}$$

Ирраціональныя содержать дѣйствіе „извлеченіе корня"; напр.;

$$5+\sqrt{7x},\ \frac{x+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+7}}\ \text{и т. д.}$$

Раціональныя раздѣляются на *цѣлыя* и *дробныя*. Цѣлыми называются функціи, въ которыхъ перемѣнныя не входятъ въ знаменатель; напр., $1-x$, $\frac{x^2+7x^3}{8}$ и т. п.; въ дробныхъ—перемѣнныя входятъ въ знаменатель; напр. $\frac{1+x}{2-x^2}$; $\frac{3+8x^2}{2y+yz}$ и т. п.

Цѣлыя функціи иногда получають названіе высшей степени перемѣннаго.

Если въ цѣлой функціи всѣ члены относительно независимыхъ перемѣнныхъ одного и того же измѣренія (измѣреніемъ члена наз. сумма показателей перемѣнныхъ величинъ), то функція наз. *однородной*; напр: $ax^3+by^2z+cxz^2+dy^3$. Въ данномъ случаѣ всѣ члены третьяго измѣренія.

Ирраціональныя функціи раздѣляются на *радикальныя* т. е., имѣющія перемѣнное подъ знакомъ корня, и *собственно ирраціональныя* т. е. такія, въ которыхъ появляются дѣйствія, зависящія отъ рѣшенія уравненія; напр.: $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g=0$.

Радикальныя функціи (Норвежскимъ ученымъ Абелемъ) раздѣлены на порядки; функціи перваго порядка имѣютъ видъ: $f(x, y, z\ldots)$. $\sqrt[n]{\varphi}\ \sqrt[m]{\psi}\ldots$), гдѣ, φ, ψ... раціональныя функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Въ функціи второго порядка вмѣсто φ, ψ.... входить радикальныя функціи перваго порядка и т. д.

Примѣръ радикальной функціи перваго порядка $\frac{1+x}{3+\sqrt{1-x}}$; второго: $\frac{2-x\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}}{1-\sqrt{x}}$.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Теорія предѣловъ.

§ 3. Предварительныя свѣдѣнія. Предѣломъ называется такая постоянная величина, къ которой приближается перемѣнная такъ, что разность между перемѣнной и постоянной можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Перемѣнная величина въ этомъ случаѣ называетсяи *приближающейся.* Способъ примѣнять свойства предѣловъ къ рѣшенію различныхъ математическихъ вопросовъ называется *способомъ предѣловъ.* Предѣлъ обладаетъ тремя свойствами: 1) предѣлъ есть величина постоянная; 2) перемѣнная величина, приближающаяся къ предѣлу или увеличивается, или уменьшается; 3) разность между предѣломъ и приближающейся величиной можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Если x—перемѣнная, приближающаяся къ предѣлу a, то $$x-a=\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$ гдѣ α есть перемѣнная, которая можетъ быть сдѣлана менѣе всякой даиной величины. Отсюда, предѣлъ $x=a$, или, какъ принято обозначать: $$\lim(x)=a \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$ Уравненія (1) и (2) выражаютъ одну и ту же мысль, а, если намъ дано одно изъ нихъ, мы можемъ написать другое. Перемѣнная α называется безконечно-малой величиной; очевидно, что $\lim(\alpha)=0$.

Примѣръ: Сумма угловъ многоугольника есть: $S=2d(n-2)$; величина каждаго угла: $A=2d-\frac{4d}{n}$; A—величина перемѣнная, а $2d$—постоянная; при $n=\infty$, A стремится къ предѣлу $2d$, или $\lim A=2d$.

§ 4. Основныя теоремы теоріи предѣловъ.

Теорема 1. Разность двухъ безконечно-малыхъ величинъ есть величина безконечно-малая.

Дано: $\lim\alpha=0$; $\lim\beta=0$.

Требуется доказать: $\lim(\alpha-\beta)=0$.

Доказательство: Если $\alpha-\beta<\alpha$, то отсюда очевидно, что $\lim(\alpha-\beta)=0$. Что и требовалось доказать (Ч. Т. Д).

Теорема 2. Алгебраическая сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ величинъ, есть величина безконечно-малая.

Дано. Конечное число (n) безконечно-малыхъ α, β, $\gamma \ldots \eta$.

Т. Д. $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\eta$=безконечно-малой.

Разобьемъ доказательство на 2 части: сначала докажемъ, что $\alpha+\beta$ есть безконечно-малая, а потомъ сдѣлаемъ обобщенiе и докажемъ всю теорему.

Доказательство (отъ противнаго). Положимъ, что: $\alpha+\beta=\xi \ldots (1)$ и $\lim\xi=\kappa, \ldots$ (2) гдѣ κ—конечное число; мы можемъ написать: $\xi=\kappa+\varepsilon \ldots$ (2'), ибо ξ съ уменьшенiемъ α и β уменьшается и, слѣдовательно, подходитъ къ предѣлу, уменьшаясь. Вставивъ въ (2') равенство (1), получаемъ: $\alpha+\beta=\kappa+\varepsilon$, перенеся β въ правую часть, найдемъ: $\alpha=\kappa+(\varepsilon-\beta)$, но по теоремѣ (1)-ой: $\varepsilon-\beta=\varepsilon'$, гдѣ ε'—безконечно-малое, т. е. $\alpha=\kappa+\varepsilon'$ или $\alpha-\varepsilon'=\kappa$. Итакъ, предположивъ, что сумма $\alpha+\beta$ есть величина конечная, мы пришли къ ложному выводу: безконечно-малое равно конечной величинѣ; слѣдовательно первая половина теоремы доказана.

Если же даны три безконечно-малыхъ, то $\alpha+\beta+\gamma=\xi+\gamma$ и такъ какъ мы знаемъ, что ξ безконечно-мало, то и $\xi+\gamma$ по предыдущему безконечно-мало. Такимъ же путемъ докажемъ, что сумма произвольнаго конечнаго числа безконечно малыхъ безконечно-мала; если же теорема справедлива для ариѳметической суммы, то тѣмъ болѣе она справедлива для алгебраической.

Теорема 3. Произведенiе безконечно-малой величины на конечную, есть безконечно-малое.

Дано. α—безконечно-малая, N—конечное число.

Тр. д. $N.\alpha$=безконечно малой.

Док. Если N цѣлое, то мы можемъ произведенiе $N.\alpha$ представить въ видѣ конечной суммы: $N.\alpha=\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha$, которая по предыдущей теоремѣ безконечно-мала. Если N не есть цѣлое,— то оно заключается всегда между двумя цѣлыми числами: n и $n+1$; n есть цѣлая часть, заключающаяся въ N и обозначается: $n=\mathrm{e}(N)$ (entier); въ такомъ случаѣ имѣемъ: $n.\alpha<N\alpha<(n+1)\alpha$.

Такъ какъ $N.\alpha$ заключается между безконечно-малыми, то оно само—безконечно-малая величина.

Теорема 4. Частное отъ дѣленiя безконечно-малой величины на конечную есть величина безконечно-малая.

Доказывается замѣной $\frac{\alpha}{N}$ черезъ $\alpha.\frac{1}{N}$.

Теорема 5. Постоянная a, заключающаяся между двумя приближающимися величинами x и x_1, разность между которыми может быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, есть ихъ общій предѣлъ.

Дано. $x-x_1=\alpha$; $x>a>x_1$.

Тр. дк. $\lim x=\lim x_1=a$.

Док. Такъ какъ $x-x_1=\alpha$, то $x-a<\alpha=$безконечно-малой, и $a-x_1<\alpha=$безконечно-малой, откуда: $\lim x=a=\lim x_1$.

Приложеніе этой теоремы: окружность есть предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ.

Теорема 6. Если приближающаяся величина x_1 заключена между другой приближающейся величиной и ея предѣломъ a, то эта величина x_1 имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и величина x.

Дано $x-a=\alpha$; $x>x_1>a$.

Тр. дк. $\lim x_1=a$.

Док. $x_1-a<x-a$, т. е. $x_1-a<\alpha$ или $x_1-a=$безконечно-малой, слѣдовательно: $\lim x_1=a$.

Приложеніе $CGC_1>\smile CAC_1>CC_1$, раздѣливъ на 2,—получаемъ: $CG>AC>CD$ или $\mathrm{tg}x>x>\mathrm{Sin}x$. Раздѣливъ на $\mathrm{Sin}x$, получимъ: $\frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{Sin}x}>\frac{x}{\mathrm{Sin}x}>1$; $\mathrm{Sec}x>\frac{x}{\mathrm{Sin}x}>1$, а такъ какъ $\lim\mathrm{Sec}x=1$ при $x=0$, то $\lim\frac{x}{\mathrm{Sin}x}=1$. Раздѣливъ на $\mathrm{tg}x$ получимъ: $1>\frac{x}{\mathrm{tg}x}>\frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{tg}x}$; $1>\frac{x}{\mathrm{tg}x}>CSx$, но такъ какъ $\lim\mathrm{Cos}x=1$ при $x=0$, то $\lim\frac{x}{\mathrm{tg}x}=1$. (Черт. 1).

На основаніи этихъ формулъ вычислены таблицы тригонометрическихъ функцій.

Теорема 7. Если разность между двумя приближающимися величинами x и x_1, можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой, то x и x_1 имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.

Дано: $\lim x=a$ т. е. $x-a=\beta$, $\lim x_1=a_1$ т. е. $x_1-a_1=\gamma$, $x-x_1=\alpha$.

Тр. дк. $a=a_1$.

Дк. Вычтемъ одно равенство изъ другого:

$$\begin{array}{r} x=a+\beta \\ -\ x_1=a_1+\gamma \\ \hline x-x_1=\alpha=a-a_1+\beta-\gamma \end{array}$$

или $a-a_1=\alpha-\beta+\gamma=$ безконечно-малой; отсюда: $a=a_1$.

Теорема 8. Если двѣ приближающіяся величины x и x_1 имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ a, то всякая третья приближающаяся величина x_2, заключающаяся между ними, имѣетъ тотъ же предѣлъ a.

Дано $\lim x=\lim x_1=a$; $x>x_2>x_1$.

Тр. дк. $\lim x_2=a$.

Дк. Вычтемъ изъ равенства

$$x=a+\alpha$$

равенство

$$\begin{array}{r} -\ x_1=a+\beta \\ \hline x-x_1=\alpha-\beta \end{array}$$

получимъ: $x-x_1=\alpha-\beta=$безконечно-малой.

$x_2-x_1<\alpha-\beta=$безконечно-малой.

$$\lim x_2=\lim x_1=\lim x=a.$$

Слѣдствія: $\lim\frac{x_1+x_2}{2}=\lim x_1=\lim x=\lim x_2$

$$\lim\sqrt{x_1x_2}=\lim x_1=\lim x_2=\lim x.$$

§ 5. Теоремы о дѣйствіяхъ надъ предѣлами.

Теорема 9. Предѣлъ разности равенъ разности предѣловъ.

Дано: $x-a=\alpha$; $y-b=\beta$.

Тр. дк. $\lim(x-y)=\lim x-\lim y$.

Док.

$$\begin{array}{r} x-a=\alpha \\ -\ y-b=\beta \\ \hline x-y-(a-b)=\alpha-\beta \end{array}=\text{безконечно-малой}$$

$$\lim(x-y)=a-b=\lim x-\lim y.$$

Теорема 10. Предѣлъ суммы равенъ суммѣ предѣловъ.

Дано. $x=a+\alpha$, $y=b+b$, $z=c+\gamma,\ldots$

Тр. Дк. $\lim(x+y+z+\ldots)=\lim x+\lim y+\lim z+\ldots$

Доказ. Складываемъ равенства:

$$\begin{array}{r} x-a=\alpha \\ +\ y-b=\beta \\ z-c=\gamma \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \hline x+y+z+\ldots-(a+b+c+\ldots)=\alpha+\beta+\gamma+\ldots \end{array}=\text{безк.-малой}$$

$$\lim(x+y+z+\ldots)=a+b+c+\ldots=\lim x+\lim y+\lim z+\ldots$$

Теоремы 9 и 10 могутъ быть соединены въ одну: **предѣлъ алгебраической суммы равенъ алгебраической суммѣ предѣловъ.**

Теорема 11. **Предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ.**

Дано: $\lim x = a,\ \lim y = b.$

Тр. Дк. $\lim xy = \lim x \,.\, \lim y.$

Дк. Перемножаемъ равенства:

$$
\begin{array}{l}
x = a + \alpha \\
y = b + \beta \\
\hline
xy = ab + a\beta + \alpha b + \alpha\beta \\
xy - ab = a\beta + \alpha b + \alpha\beta = \text{безконечно-малой} \\
\lim xy = ab = \lim x \,.\, \lim y.
\end{array}
$$

Теорема распространяется на произвольное конечное число множителей.

Теорема 12. **Предѣлъ частнаго равенъ частному отъ предѣловъ.**

Дано: $\lim x = a,\ \lim y = b.$

Тр. Дк. $\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$

Дкз.: Дѣлимъ равенство: $x = a + \alpha$ на $y = b + \beta$, получаемъ:

$$\frac{x}{y} = \frac{a+\alpha}{b+\beta};\quad \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)} = \text{безк. малой};\ \lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Теорема 13. **Предѣлъ степени равенъ степени предѣла.**

Дано: $\lim x = a.$

Тр. Дк. $\lim(x^m) = (\lim x)^m.$

Дк. 1) Цѣлая положительная степень $\lim(x^m) = \lim(x.x.x\ldots\ldots) = \lim x.\lim x\ldots\ldots\lim x = (\lim x)^m.$

2) Цѣлая отрицательная степень, $m = -n$; $\lim(x^m) = \lim(x^{-n}) =$

$$= \lim\left(\frac{1}{x}\right)^n = \left[\lim\left(\frac{1}{x}\right)\right]^n = (\lim x)^{-n} = (\lim x)^m.$$

Теорема 14. **Предѣлъ корня равенъ корню изъ предѣла.**

Дано: x — приближающаяся величина.

Тр. Дк. $\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}.$

Дк. $\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{(\lim \sqrt[m]{x})^m} = \sqrt[m]{\lim(\sqrt[m]{x})^m} = \sqrt[m]{\lim x}.$

При помощи этой теоремы можно разсмотрѣть еще одинъ случай предыдущей, когда степень дробная:

$$\lim\left(x^{\frac{p}{q}}\right)=\lim\sqrt[q]{x^p}=\sqrt[q]{\lim(x^p)}=\sqrt[q]{(\lim x)^p}=\left(\lim x\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Теорема 15. Для конечнаго числа N и безконечно малаго α, $\lim N^\alpha=1$.

Дк. 1) $N>1$, $\alpha>0$.

Положивъ $\alpha=\frac{1}{n}$, имѣемъ $N^\alpha=N^{\frac{1}{n}}$, гдѣ n—безконечно-большое.

Возьмемъ геометрическую прогрессію:

$$N^{\frac{1}{n}};\ N^{\frac{2}{n}},\ N^{\frac{3}{n}}\ldots\ldots N^{\frac{n-1}{n}}.$$

Сумма членовъ ея $\dfrac{N^{\frac{n-1}{n}}\cdot N^{\frac{1}{n}}-1}{N^{\frac{1}{n}}-1}=\dfrac{N-1}{N^{\frac{1}{n}}-1}$.

Каждый членъ больше единицы, поэтому:

$$\frac{N-1}{N^{\frac{1}{n}}-1}>n,\ \text{или}\ N^{\frac{1}{n}}-1<\frac{N-1}{n}.$$

Кромѣ того $N^{\frac{1}{n}}-1>0$, а такъ какъ $\lim\frac{N-1}{n}=0$, то и

$$\lim\left(N^{\frac{1}{n}}-1\right)=0,\ \text{или}\ \lim N^\alpha=1.$$

2) $N<1$; $\alpha>0$.

Полагаемъ: $N=\frac{1}{M}$; $\lim N^\alpha=\lim\frac{1}{M^\alpha}=\frac{1}{\lim M^\alpha}=1$.

3) $\alpha<0$; $N\gtrless 1$.

Полагая $\alpha=-\beta$, найдемъ: $\lim N^\alpha=\lim N^{-\beta}=\lim\frac{1}{N^\beta}=\frac{1}{\lim N^\beta}=1$.

Теорема 16. $\lim N^x=N^{\lim x}$.

Док. Изъ обѣихъ частей равенства: $N^x=N^{a+\alpha}$ вычитаемъ по N^a.
$N^x-N^a=N^{a+\alpha}-N^a=N^a(N^\alpha-1)$ = безк.-малой $\lim N^x=N^a=N^{\lim x}$.

Теорема 17. Предѣлъ логариѳма равенъ логариѳму предѣла.

Дк. Положимъ: $Lg_q x = y$ т. е. $x = q^y$.
Тогда $\lim(Lx) = \lim y$

$\lim x = \lim q^y = q^{\lim y} = a.$ Отсюда:

$\lim y = L_q a = L(\lim x.)$

Теорема 18. $\lim x^y = \lim y x^{\lim y}$

Дк. $Lx^y = yLx$; $\lim Lx^y = \lim y . \lim Lx =$

$= \lim y . L(\lim x) = L(\lim x^{\lim y})$ или

$L(\lim x^y) = L(\lim^{\lim y})$, т. е. $\lim x^y = \lim x^{\lim y}$

Общій выводъ изъ 18 теоремъ.

Предѣлъ функціи равенъ функція предѣловъ.

$\lim f(x,y,z \ldots) = f(\lim x, \lim y, \lim z \ldots)$

§ 6. Задача. Найти предѣлъ средняго ариѳметическаго ряда:
$0, \left(\frac{1}{n}\right)^m, \left(\frac{2}{n}\right)^m, \left(\frac{3}{n}\right)^m, \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$, при n безконечно-большомъ.

Докажемъ предварительно, что *среднее ариѳметическое нѣсколькихъ чиселъ меньше наибольшаго и больше наименьшаго.*

Положимъ, что наибольшее изъ n величинъ: $x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_n$, есть a и наименьшее b; тогда:

$$a \geqq x_1 \geqq b$$
$$a \geqq x_2 \geqq b$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$a \geqq x_n \geqq b$$

$$na \geqq x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geqq nb,$$ или:
$$a \geqq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geqq b.$$

Теперь приступимъ къ рѣшенію нашей задачи. Обозначимъ искомое средне-ариѳметическое черезъ M_n.

$$M_n = \frac{0 + \left(\frac{1}{n}\right)^m + \left(\frac{2}{n}\right)^m + \left(\frac{3}{n}\right)^m + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^m}{n} =$$

$$= \frac{0 + \frac{1^m}{n^m} + \frac{2^m}{n^m} + \frac{3^m}{n^m} + \ldots + \frac{(n-1)^m}{n^m}}{n}$$

$$M_n = \frac{1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (n-1)^m}{n^{m+1}}.$$

Возьмемъ теперь два числа a и b, при чемъ $a>b$ и напишемъ тождество: $\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}=a^m+ba^{m-1}+b^2a^{m-2}+\ldots\ldots+b^m$.

Всѣ $m+1$ членовъ больше b^m и меньше a^m; поэтому мы имѣемъ право написать:

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}>(m+1)b^m\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}<(m+1)a^m\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Дадимъ a и b частныя значенія; въ неравенствѣ (1) положимъ $a=x+1$ и $b=x$, а въ неравенствѣ (2)—:$a=x$ и $b=x-1$

$$\frac{(x+1)^{m+1}-x^{m+1}}{(x+1)-x}>(m+1)x^m$$

$$\frac{x^{m+1}-(x-1)^{m+1}}{x-(x-1)}<(m+1)x^m,$$

отсюда получаемъ:

$$\frac{(x+1)^{m+1}-x^{m+1}}{m+1}>x^m>\frac{x^{m+1}-(x-1)^{m+1}}{m+1}\ldots\ldots(3).$$

Поставимъ вмѣсто x въ неравенство (3) послѣдовательно всѣ значенія: 1, 2, 3....$(n-1)$ и сложимъ всѣ неравенства почленно.

$$\frac{2^{m+1}-1}{m+1}>1^m>\frac{1}{m+1}$$

$$\frac{3^{m+1}-2^{m+1}}{m+1}>2^m>\frac{2^{m+1}-1}{m+1}$$

$$\frac{4^{m+1}-3^{m+1}}{m+1}>3^m>\frac{3^{m+1}-2^{m+1}}{m+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n^{m+1}-(n-1)^{m+1}}{m+1}>(n-1)^m>\frac{(n-1)^{m+1}-(n-2)^{m+1}}{m+1}$$

$$\frac{n^{m+1}-1}{m+1}>1+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m>\frac{(n-1)^{m+1}}{m+1}\ldots(4).$$

Дѣлимъ на n^{m+1}:

$$\frac{1}{m+1}\left(1-\frac{1}{n^{m+1}}\right)>\frac{1+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}>\frac{(n-1)^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{1}{n^{m+1}}$$

а такъ какъ $\lim\left[\frac{1}{m+1}\left(1-\frac{1}{n^{m+1}}\right)\right]_{n=\infty}=\frac{1}{m+1}$, равно какъ и $\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1}_{n=\infty}\cdot\frac{1}{m+1}\right]=\frac{1}{m+1}$, то отсюда по теоремѣ восьмой (§ 4) заключаемъ:

$$\lim\frac{1+2^m3^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1},$$

т. е. $\lim M_n=\frac{1}{m+1}$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Сходимость безконечныхъ рядовъ по ихъ внѣшнему виду.

§ 7. Предварительныя свѣдѣнія.

Безконечнымъ рядомъ называется совокупность безконечнаго числа членовъ, слѣдующихъ одинъ за другимъ по одному опредѣленному закону.

Рядъ изображается въ видѣ:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots\ldots u_{n-1},\ u_n\ldots\ldots$$

u_n —называется общимъ членомъ ряда. Законъ ряда выражается тѣмъ, что *величина члена опредѣляется по мѣсту, занимаемому въ рядѣ*, т. е. $u_n=f(n)$, такъ что: $u_1=f(1)$, $u_2=f(2)$, $u_3=f(3)$ ....Если данъ общій членъ, то мы можемъ написать весь рядъ, поэтому часто вмѣсто того, чтобы писать весь рядъ, пишуть только его общій членъ. Напр., $u_n=\frac{1}{n}$; рядъ изобразится такъ: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n}$.

Сумма всѣхъ членовъ ряда называется суммой ряда. Сумма (s_n) n членовъ безконечнаго ряда съ увеличеніемъ n приближается къ суммѣ всѣхъ членовъ ряда s, т. е. $\lim s_n=s$.

Ряды раздѣляются на сходящіеся, расходящіеся и неопредѣленные. Если $\lim s_n=s=k=$, гдѣ k—конечное число,—рядъ сходящійся если $\lim s_n=s=\infty$, то рядъ—расходящійся; если же $\lim s_n=s$ не имѣетъ никакого опредѣленнаго предѣла—рядъ неопредѣленный. *Главное значеніе имѣютъ въ математикѣ ряды сходящіеся*; расходящіеся и неопредѣленные не разсматриваются вовсе, такъ что сходимость ряда и расходимость его равносильны годности или негодности ряда.

Примѣры: 1) Сходящійся рядъ: $u_n=\frac{1}{2^n}$

$$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)_{n=\infty}=1.$$

2) Расходящійся рядъ: $u_n=n$

$$s=1+2+3+\ldots\ldots=\infty$$

3) Неопредѣленный рядъ или колеблющійся: $u_n=(-1)^{n+1}$

$$s=1-1+1-1+1\ldots\ldots\ldots$$

По знакамъ членовъ ряды раздѣляются *знакопостоянные и знакопеременные*, т. е. имѣющіе всѣ члены съ однимъ знакомъ и съ разными.

По функціямъ, которыми выражается общій членъ, ряды раздѣляются на *возрастающіе и убывающіе*; въ возрастающемъ рядѣ $u_n<u_{n+1}$, а въ убывающемъ $u_n>u_{n+1}$.

Признаки сходимости рядовъ раздѣляются на *необходимые*, т. е. такіе, при отсутствіи которыхъ рядъ не можетъ быть сходящимся, и *достаточные*, т. е. такіе, при которыхъ рядъ непремѣнно сходится. На сходимость безконечныхъ рядовъ впервые обратилъ вниманіе Лейбницъ; развитіемъ своимъ эта теорія обязана Эйлеру и главнымъ образомъ Коши; *окончательно же разработана она у насъ въ Россіи профессоромъ Московскаго Императорскаго Университета Н. В. Бугаевымъ.*

§ 8. Необходимые признаки сходимости рядовъ.

Первый необходимый признакъ сходимости рядовъ состоитъ въ томъ, что *общій членъ есть функція убывающая.* Другіе необходимые признаки выражаются въ слѣдующихъ теоремахъ.

Теорема 1. *Въ сходящемся рядѣ предѣлъ суммы всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за общимъ, равенъ нулю.*

Дано: $\lim S_n=S=k$ (конечная велич.).

Тр. дк. $\lim(u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m})=0.$

Дк.

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

$$S_{n+m}=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n+m}$$

$$S_{n+m}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots+u_{n+m}$$

$$\lim(u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+m})=\lim(S_{n+m})-\lim(S_n)=S-S=0.$$

Теорема 2. *Въ сходящемся рядѣ предѣлъ общаго члена равенъ нулю.*

Дано: $\lim S_n = S = K.$

Тр. дк. $\lim u_n = 0.$

Дк.:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} = u_n$$

$$\lim u_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0.$$

Какъ сказано, приведенные признаки — необходимы, но не достаточны для сходимости ряда. Приведемъ примѣръ, въ которомъ рядъ обладаетъ этими признаками и въ то же время есть рядъ — расходящійся.

Примѣръ. Гармоническій рядъ: $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n} + \dots$ — убывающій и удовлетворяетъ условію:

$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Разобьемъ его на группы, заключающія $n, n, 2n, 4n \dots$, членовъ:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} +$$

$$+ \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \dots + \frac{1}{8n} + \dots$$

Тогда мы можемъ написать рядъ неравенствъ:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n} > \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{4n} = 2n \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4n+1} + \dots + \frac{1}{8n} > \frac{1}{8n} + \frac{1}{8n} + \dots + \frac{1}{8n} = 4n \cdot \frac{1}{8n} = \frac{1}{2}$$

. . . .

. . . .

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$ Рядъ расходящійся.

Такъ какъ расходящіеся ряды мы считаемъ негодными и не разсматриваемъ, то въ дальнѣйшемъ изложеніи мы полагаемъ, что ряды удовлетворяютъ необходимымъ признакамъ.

§ 9. *Сравнительныя леммы.*

Лемма 1. *Если члены какого-нибудь ряда:* $v_1+v_2+v_3+\dots$ $\dots+v_n+\dots$ *по абсолютной величинѣ менѣе другого знакопостояннаго положительнаго, сходящагося ряда:* $u_1+u_2+u_3+\dots u_n+\dots$, *то рядъ* (v_n)—*сходящійся.*

Дано: Рядъ (u_n)—сходящійся; $u_1>v_1$; $u_2>v_2$; $u_3>v_3,\dots u_n>v_n$.
Тр. дк. Рядъ (v_n)—сходящійся.

Дк. Представимъ сумму перваго ряда S_n (большое) въ видѣ $s_n-\sigma_n$, гдѣ s_n (малое)—сумма положительныхъ членовъ, $-\sigma_n$—отрицательныхъ. Соотвѣтствующіе члены второго ряда тоже соединимъ въ двѣ суммы (онѣ обѣ положительны), такъ что $S_n'=s_n'+\sigma_n'$. По условію имѣемъ: $s_n<s_n'$ и $\sigma_n<\sigma_n'$; поэтому: $\lim s_n<\lim s_n'$ и $\lim\sigma_n<\lim\sigma_n'$; но $\lim s_n'$ и $\lim\sigma_n'$ -величины конечныя, слѣдовательно и $\lim s_n$ и $\lim\sigma_n$—тоже конечны; если такъ, то $\lim S_n=\lim s_n-\lim\sigma_n$ величина конечная, и рядъ (V_n)—сходящійся.

Примѣръ. Мы знаемъ что рядъ $\left(\frac{1}{2^n}\right)$—сходящійся.

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots=1.$$

Рядъ $\left(\frac{1}{n!}\right)$ тоже сходящійся, такъ какъ члены перваго больше соотвѣтствующихъ членовъ второго

$$S_1=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots$$

Дѣйствительно мы впослѣдствіи увидимъ, что рядъ S_1 сложенный съ 2_1 есть величина конечная, играющая очень важную роль въ математикѣ, она служитъ основаніемъ Непперовыхъ логариѳмовъ и обыкновенно обозначается буквою—l; ея численная величина есть—2,7182818284...

Лемма 2. Дюгамеля (Duhamel) *Если рядъ* $S_1=u_1+u_2+u_3+\dots$ $\dots+u_n\dots$, *сходится быстрѣе ряда* $S_2=v_1+v_2+v_3+\dots v_n+\dots$, *то онъ сходится, если второй рядъ сходится; если же первый рядъ расходится, то непремѣнно расходится и второй.*

Дк. Если рядъ (u_n) сходится быстрѣе ряда (v_n), то имѣютъ мѣсто неравенства:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ &\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} \\ &\frac{u_{n+3}}{v_{n+2}} < \frac{v_{n+3}}{u_{n+2}} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (1)$$

Изъ неравенства (1) получаемъ:

$$\begin{aligned} &u_{n+1} < u_n \cdot \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ &u_{n+2} < u_{n+1} \cdot \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} \\ &u_{n+3} < u_{n+2} \cdot \frac{v_{n+3}}{v_{n+2}} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (2)$$

а также:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n} \\ &\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n} \\ &\frac{u_{n+3}}{v_{n+3}} < \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (3)$$

Мы имѣемъ право въ неравенствѣ (2) вставить $\frac{u_n}{v_n}$ вмѣсто $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$, $\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}$.... Они примутъ видъ:

$$u_{n+1} < v_{n+1} \cdot \frac{u_n}{v_n}$$

$$u_{n+2} < v_{n+2} \cdot \frac{u_n}{v_n}$$

$$u_{n+3} < v_{n+3} \cdot \frac{u_n}{v_n}$$

Сложивъ эти неравенства получимъ:

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots<\frac{u_n}{v_n}(v_{n+1}+v_{n+2}+v_{n+3}+\ldots\ldots \quad (4)$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ первые n членовъ ряда (u_n), въ лѣвой части получимъ сумму перваго ряда. Если второй рядъ— сходящійся, то въ правой части окажется конечная величина; поэтому и первый рядъ будетъ сходящимся. Итакъ первая часть леммы—доказана. Представимъ неравенство (4) въ видѣ:

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots>\frac{v_n}{u_n}(u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

и прибавимъ къ обѣимъ частямъ сумму n членовъ ряда (v_n), тогда въ лѣвой части мы получимъ сумму всего ряда (v_n). Если рядъ (u_n)—расходящійся, то въ правой части окажется безконечная величина, т. е. рядъ (v_n) будетъ непремѣнно расходящійся. Въ этомъ заключалась вторая часть леммы.

Лемма 3 Абеля. Если члены сходящагося ряда (u_n) соответственно умножимъ на числа: ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n \ldots$, *изъ которыхъ каждое меньше опредѣленнаго числа к, то получимъ рядъ:* $\varepsilon_1 u_1+\varepsilon_2 u_2+$ $+\varepsilon_3 u_3+\ldots\ldots+\varepsilon_n u_n+\ldots\ldots$ *тоже сходящійся.*

Док. Умножаемъ неравенства: $\varepsilon_1<k$; $\varepsilon_2<k$; $\varepsilon_3<k\ldots\ldots$ $\varepsilon_n<k\ldots\ldots$ соотвѣтственно на: u_1, u_2, $u_3\ldots\ldots u_n\ldots\ldots$ и складываемъ вновь полученныя неравенства: $\varepsilon_1 u_1<ku_1$; $\varepsilon_2 u_2<ku_2$; $\varepsilon_3 u_3<ku_3\ldots\ldots\varepsilon_n u_n<ku_n\ldots\ldots$ получаемъ: $\varepsilon_1 u_1+\varepsilon_2 u_2+\varepsilon_3 u_3+\ldots$ $+\ldots+\varepsilon_n u_n+\ldots<k(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots)$; но правая часть есть конечное число, слѣдовательно, рядъ, стоящій въ лѣвой части—сходящійся, что и требовалось доказать.

§ 10. Достаточные признаки сходимости. Теорема Ивана Бернулли.

Убывающій знакопеременный рядъ всегда рядъ сходящійся.

Дано: $S=u_1-u_2+u_3-u_4\ldots$; $u_1>u_2$; $u_2>u_3$; $u_3>u_4$;$\ldots$ $u_{n+1}>u_n\ldots$
Тр. дк. Рядъ (u_n)—сходящійся.

Дк. $S=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-(u_6-u_7)\ldots\ldots$; $S<u_1\ldots$ (1)

$S=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots\ldots$; $S>u_1-u_2\ldots\ldots$ (2)

Величина S, заключенная между конечными предѣлами, сама конечна, и потому рядъ (u_n)—сходящійся. Рядъ можно написать еще въ такомъ видѣ:

$S=u_1-u_2+u_3-(u_4-u_5)-(u_6-u_7)\ldots\ldots$; $S<u_1-u_2+u_3$. (3)

Изъ составленія неравенствъ (1), (2) и (3) заключаемъ, что сумма знакоперемѣннаго ряда заключается всегда между двумя послѣдовательными суммами. Примѣръ такого ряда:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots\dots$$

Сумма его равна $-\frac{\pi}{4}$ (*выводъ Лейбница*).

Если знаки чередуются не черезъ членъ, но все-таки правильно, то для доказательства однозначные члены складываются.

§ 11. Теорема сопряженныхъ рядовъ. (Коши).

Опредѣленіе. *Два ряда называются взаимно-сопряженными, если они обладаютъ такимъ взаимнымъ свойствомъ, что сходимость или расходимость перваго обусловливаетъ сходимость или расходимость второго и наоборотъ.*

Теорема. Два ряда (u_n) и $(a^n u_{a^n})$ *при* $a>1$ *суть ряды сопряженные*

Дк. Рядъ (u_n)—убывающій, поэтому u_a, какъ послѣдній членъ этого ряда, меньше каждаго предшествующаго члена $(u_2, u_3 \dots)$; стало быть

$$\begin{aligned}
&u_2+u_3+\dots u_a>(a\quad 1)u_a\\
&u_{a+1}+u_{a+2}+\dots u_{a^2}>(a^2-a)u_{a^2}\\
&u_{a^2+1}+u_{a^2+2}+\dots u_{a^3}>(a^3-a^2)u_{a^3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

гдѣ $(a-1)$—число членовъ. Или, что то же:

$$\begin{aligned}
&(a-1)u_a<u_2+u_3+\dots+u_a\\
&(a-1)au_{a^2}<u_{a+1}+u_{a+2}+\dots+u_{a^2}\\
&(a-1)a^2u_{a^3}<u_{a^2+1}+u_{a^2+2}+\dots+u_{a^3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Умножимъ обѣ части равенства на $\frac{a}{a-1}$ и прибавимъ еще равенство: $u_1=u_1$; тогда по сложеніи получимъ:

$$u_1=u_1$$

$$au_a<\frac{a}{a-1}(u_2+u_3+\dots+u_a)$$

$$a^2u_{a^2}<\frac{a}{a-1}(u_{a+1}+u_{a+2}+\dots+u_{a^2})$$

$$a^3u_{a^3}<\frac{a}{a-1}(u_{a^2+1}+u_{a^2+2}+u_{a^2+3}+\dots+u_{a^3})$$

. . . .

$$u_1+au_a+a^2u_{a^2}+a^3u_{a^3}+\dots<u_1+\frac{a}{a-1}(u_2+u_3+\dots+u_n+\dots)\quad(1)$$

Обозначимъ сумму ряда (u_n) черезъ S и сумму ряда $(a^nu_{a^n})$ черезъ S_a: неравенство (1) приметъ видъ:

$$S_a<u_1+\frac{a}{a-1}(s-u_1)\dots\dots\quad(2)$$

Точно также складывая неравенства:

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_{a-1}<(a-1)u_1$$
$$u_a+u_{a+1}+\dots+u_{a^2-1}<(a^2-a)u_a$$
$$u_{a^2}+u_{a^2+1}+\dots+u_{a^3-1}<(a^3-a^2)u_{a^2}$$

. . . .

и, вынося за скобку во второй части $(a-1)$, найдемъ:

$$S<(a-1)s_a\dots\dots\quad(3)$$

Изъ неравенства (2) слѣдуетъ: 1) если рядъ (u_n)—сходящійся, то и рядъ $(a^nu_{a^n})$—сходящійся; 2) если рядъ $(a^nu_{a^n})$ — расходящійся, то и рядъ (u_n)—расходящійся. Изъ неравенства (3) слѣдуетъ: 1) если рядъ $(a^nu_{a^n})$ —сходящійся, то рядъ (u_n)—сходится; 2) если (u_n)—рядъ расходящійся, то и $(a^nu_{a^n})$—тоже расходящійся. Итакъ, неравенства (2) и (3) показываютъ сопряженность рядовъ (u_n) и $(a^nu_{a^n})$. Рядъ (u_n) называется *предшествующимъ сопряженнымъ* $(a^nu_{a^n})$—*послѣдующимъ*.

§ 12. Приложеніе теоремы Коши.

Теорема 1. *Гармоническій рядъ*: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ *есть рядъ расходящійся.*

Дк. Сопряженный рядъ будетъ $a^nu_{a^n}=a^n\cdot\frac{1}{a^n}=1$, рядъ расходящійся.

Теорема 2. Рядъ: $1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\dots+\frac{1}{n^k}+\dots$ сходится при $k>1$ и расходится при $k\leqq1$.

Док. $a^n u_{a^n} = a^n \cdot \frac{1}{(a^n)^k} = \frac{a^n}{(a^k)^n} = \frac{1}{(a^{k-1})^n} = \frac{1}{a_1{}^n}$, гдѣ $a_1 = a^{k-1}$.

$$S_a = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1{}^2} + \ldots + \frac{1}{a_1{}^n} + \ldots.$$

т. е., S_a есть геометрическая прогрессія; она сходится, если убываетъ, слѣдовательно, для сходимости должно удовлетворяться условіе: $\frac{1}{a_1} < 1$, откуда $a_1 > 1$ или $a^{k-1} > 1$; $k-1 > 0$; $k > 1$; она расходится, если $\frac{1}{a_1} \geqq 1$; откуда: $a^{k-1} \leqq 1$; или $k \leqq 1$; (при $k=1$ — рядъ гармоническій).

§ 13. *Необходимые признаки сходимости Каталана* (Catalan).

Въ сходящемся рядѣ $\lim u_n = 0$, слѣдовательно

$$\lim u_n = \lim a^n u_{a^n} = 0.$$

но вмѣсто a^n можно взять какое-угодно число, поэтому замѣняемъ его черезъ $\overline{n}$ и получимъ 1-ый признакъ:

$$\lim n u_{\overline{n}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Затѣмъ: $\lim n u_n = \lim n a^n u_a n = 0.$

Подставляя $\overline{n}$ вмѣсто a^n, найдемъ 2-й признакъ:

$$\lim L\overline{n} \, . \, n u_{\overline{n}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

такъ какъ $a^n = \overline{n}$ и $Lgn = n$.

Такимъ же образомъ получимъ 3-й примѣръ.

$$\lim L(L\overline{n}) L\overline{n} \, . \, n \, . \, u_{\overline{n}} = 0 \ldots\ldots (3) \qquad \text{и т. д.}$$

Примѣры: 1) Гармоническій рядъ. Прилагаемъ первый признакъ Каталана:

$$\lim n \, . \, \frac{1}{n} = 1 \text{ т.-е. рядъ расходящійся}$$

2) Рядъ $1 + \frac{1}{2L2} + \frac{1}{3L3} + \ldots\ldots + \frac{1}{nLn} + \ldots\ldots$ Прилагаемъ второй признакъ; $\lim Ln \, . \, n \, . \, u_{\overline{n}} = \lim \frac{Ln \, . \, n}{n \, . \, Ln} = 1$, т.-е. рядъ расходящійся.

§ 14. *Основной признакъ сходимости д'Аламбера (d'Alamber).*
Убывающій знакопостоянный рядъ сходится, если предѣлъ отношенія послѣдующаго члена къ предыдущему меньше единицы, и

расходится, если этотъ предѣлъ больше единицы; т.-е. рядъ сходится, если $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *и расходится, если* $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Дк. Для случая: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$.

1) Отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ предѣлу k, увеличиваясь. Въ этомъ случаѣ:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k$$

$$\cdots\cdots$$

Иначе говоря:

$$u_{n+1} < k . u_n$$

$$u_{n+2} < k . u_{n+1} < k^2 u_n$$

$$u_{n+3} < k . u_{n+2} < k^3 u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

И тѣмъ болѣе:

$$u_{n+1} < k . u_n$$

$$u_{n+2} < k^2 u_n$$

$$u_{n+3} < k^3 u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Сложивъ послѣднія неравенства, получимъ:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots < (k + k^2 + k^3 + \ldots .) u_n$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ первые n членовъ:

$$S < u_1 + u_2 + u_2 + \ldots . + u_n + (k + k^2 + k^3 + \ldots .) u_n$$

Замѣтивъ, что $k + k^2 + k^3 + \ldots . = \frac{k}{1-k} u_n$, найдемъ:

$$S < u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . + u_n + \frac{k}{1-k} u_n.$$

Сумма равна величинѣ конечной и потому рядъ сходящійся.

2) *Отношеніе* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ предѣлу k, уменьшаясь.

Мы всегда можемъ выбрать достаточно большое n, чтобы $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

было меньше ρ, гдѣ $k<\rho<1$; тогда такъ же какъ и въ первомъ случаѣ, найдемъ $S<u_1+u_2+\ldots+u_n+\frac{\rho}{1-\rho}u_n$.

Признакъ этотъ не годенъ, если $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, что имѣетъ мѣсто при гармоническомъ рядѣ.

Если $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то рядъ—возрастающій, и потому расходящійся.

§ 15. *Основной признакъ Коши.* Рядъ (u_n) сходится, если $\lim (u_n)^{\frac{1}{n}}<1$, и расходится, если $\lim (u_n)^{\frac{1}{n}}>1$.

Док.: 1) $k<1$ и $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ подходитъ къ предѣлу, увеличиваясь.

Пишемъ неравенства:

$$(u_n)^{\frac{1}{n}}<k$$
$$(u_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}<k$$
$$(u_{n+2})^{\frac{1}{n+2}}<k$$

или:

$$u_n<k^n$$
$$u_{n+1}<k^{n+1}$$
$$u_{n+2}<k^{n+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Складываемъ ихъ:

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots\ldots+<k^n+k^{n+1}+k^{n+2}+\ldots\ldots$$

Прибавляемъ къ обѣимъ частямъ первые $n-1$ членовъ и замѣняемъ безконечно-убывающую прогрессію въ правой части ея величиной: $\frac{k^n}{1-k}$:

$$S<u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_n+\frac{k^n}{1-k},$$

рядъ S—сходящійся.

Если $(u)^{\frac{1}{n}}$ подходитъ къ предѣлу, уменьшаясь, то, взявъ додостаточно большое n, найдемъ такую величину ρ, для которой $(u_n)^{\frac{1}{n}}<\rho$ и ρ удовлетворяетъ условію $k<\rho<1$.

Тогда, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, найдемъ:

$$S<u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}+\frac{\rho^n}{1-\rho}$$

Признакъ Коши не годенъ, если $\lim (u_n)^{\frac{1}{n}}=1$.

2) $k>1$ и $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ подходитъ къ предѣлу, убывая; тогда:

$$\begin{gathered}
(u_n)^{\frac{1}{n}}>k \\
(u_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}>k \\
(u_{n+2})^{\frac{1}{n+2}}>k \\
\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

или:

$$\begin{gathered}
u_n>k^n \\
u_{n+1}>k^{n+1} \\
u_{n+2}>k^{n+2} \\
\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Сложивъ эти неравенства, получимъ:

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots>k^n+k^{n+1}+k^{n+2}+\ldots\ldots$$

Прибавляемъ первые $n-1$ членовъ:

$$S>u_1+{}_2+u_3+\ldots+u_n+(k^n+k^{n+1}+\ldots.).$$

Въ правой части сумма возрастающей геометрической прогрессіи равна безконечности и потому рядъ — расходящійся. Если $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ подходитъ къ предѣлу, возрастая, то мы можемъ взять достаточно большое n, чтобы $\lim (u_n)^{\frac{1}{n}}>\rho$, гдѣ $k>\rho>1$, и тогда докажемъ, что:

$$S>u_1+u_2+\ldots+n_{n+1}+(\rho^n+\rho^{n+1}+\rho^{n+2}\ldots)$$

т.-е., что рядъ—расходящійся.

Чувствительнѣе предыдущихъ оказывается слѣдующій признакъ.

§ 16. *Признакъ Дюамеля* (иначе Раабе и Гаусса).

Рядъ (u_n)—сходящійся, если $M=\lim\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n>1$ и — расходящійся, если $M<1$.

Дк.: Можно найти такое число k, что рядъ (u_n) будетъ сходиться быстрѣе ряда $\left(\frac{1}{n^k}\right)$; тогда:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{(n+1)^k}:\frac{1}{n^k}$$

или

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n^k}{(n+1)^k},$$

откуда

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^k$$

Представивъ $\frac{n+1}{n}$ въ видѣ $1+\frac{1}{n}$ и, разлагая въ рядъ по биному Ньютона, найдемъ:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{k}{n}+\frac{k(k-1)}{1.2.n^2}+\ldots.$$

Переносимъ 1 въ лѣвую часть и умножаемъ обѣ части на n

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n>k+\frac{k(k-1)}{1.2.n}+\ldots..$$

Въ предѣлѣ послѣднее неравенство приметъ видъ:

$$\lim\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n>k,$$

но если $k>1$, то рядъ $\left(\frac{1}{n^k}\right)$—сходящійся и тѣмъ болѣе сходящійся (u_n), слѣдовательно, условіе

$$\lim\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n>1$$

достаточно для сходимости ряда.

Выберемъ теперь k такъ, чтобы рядъ $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ сходился быстрѣе ряда (u_n). Въ этомъ случаѣ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}<\frac{1}{n^k}:\frac{1}{(n+1)^k}$$

или

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$$

Разлагая въ рядъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$ по биному Ньютона, получаемъ:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}<1+\frac{k}{n}+\frac{k(k-1)}{1.2.n^2}+\ldots.$$

Переносимъ 1 въ лѣвую часть и умножаемъ обѣ части на равенства на n:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)n<k+\frac{k(k-1)}{1.2.n}+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3n^2}+\ldots.$$

Въ предѣлѣ послѣднее неравенство приметъ видъ:

$$\lim\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n<k.$$

Если $k<1$, то рядъ $\left(\frac{1}{n^k}\right)$—расходящійся и тѣмъ болѣе расходящійся рядъ (u_n); потому, если $\lim\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n<1$, рядъ (u_n) —расходящійся.

Для гармоническаго ряда этотъ признакъ не годенъ; онъ даетъ:

$$\lim\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)n=1.$$

§ 17. Составленіе признаковъ сходимости при помощи сопряженныхъ рядовъ.

Профессоръ Н. В. Бугаевъ въ своей магистерской диссертаціи: „Сходимость безконечныхъ рядовъ по ихъ внѣшнему виду“ (Москва 1862 г.) показалъ, что нѣтъ надобности отыскивать новые признаки сходимости рядовъ, потому что, пользуясь основной идеей сопряженныхъ рядовъ, мы можемъ выводить безчисленное множество признаковъ и притомъ съ очень большой степенью чувствительности.

Дѣйствительно, сопряженныхъ рядовъ можно составлять сколько угодно. Рядъ послѣдующій ряда $(a^n u_{a^n})$ есть:

$\left(a^n a^{a^n} u_{a^{a^n}}\right)$, затѣмъ: $\left(a^n a^{a^n} a^{a^{a^n}} u_{a^{a^{a^n}}}\right)$, и т. д. Чтобы получить предшествующій рядъ ряду $(a^n u_{a^n})$, надо общій членъ раздѣлить на a_n и для опредѣленія мѣстъ взять L_a отъ числа a^n; слѣдовательно, рядъ, предшедствующій ряду u_n есть:

$$\frac{uL_a n}{n},\ \text{затѣмъ:}\ \frac{uL_a{}^2 n}{nL_a n},\ \frac{uL_a{}^3 n}{nL_a nL_a{}^2 n},\ \ldots.$$

Прилагая извѣстные признаки сходимости къ рядамъ сопряженнымъ, получимъ новые признаки, гораздо болѣе чувствительные. Напр., примѣнимымъ признакъ сходимости д'Аламбера къ сопряженному ряду, найдемъ:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lim a^{n+1} u_{a^{n+1}}}{a^n u_{a^n}} = \frac{\lim a u_{an_1}}{u_n}$$

гдѣ $n_1 = a^n$; отсюда признакъ сходимости:

$$\lim \frac{a u_{an}}{u_n} < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Изъ этого признака составляемъ слѣдующій:

$$a u_{an} = a a^{an} u_{a^{an}}$$

$$\lim \frac{a u_{an}}{u_n} < 1$$

или: $$\lim \frac{a u_{an}}{u_n} = \frac{\lim a a^{an} u_{a^{an}}}{a^n u_{a^n}} = \lim \frac{a n_1{}^a u_{n_1{}^a}}{n_1 u_{n_1}} =$$

$$\lim \frac{a n_1{}^{a-1} u_{n_1{}^a}}{u_{n_1}}$$

т. е. признакъ сходимости есть:

$$\lim \frac{a n^{a-1} u_{n^a}}{u_n} < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Такимъ же путемъ можемъ получить сколько угодно признаковъ сходимости:

Частный случай. Если въ признакахъ (1) и (2) положимъ $a=2$, то они получатъ видъ:

$$\lim \frac{2u_{2n}}{u_n} < 1 \text{ и } \lim \frac{2nu_{n^2}}{u_n} < 1$$

Эти признаки по чувствительности соотвѣтствуютъ признакамъ:

$$\lim \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) n > 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{Дюгамеля})$$

и $$\lim \left[\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) n - 1\right] \mathrm{L}n > 1 \ldots\ldots\ldots (\text{Моргана}).$$

Можно также получать признаки сходимости при помощи сопряженныхъ рядовъ изъ признака Коши.

$$\lim (u_n)^{\frac{1}{n}} < 1$$

$$\lim (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim \left(a^n u_{a^n}\right)^{\frac{1}{n}};$$

Полагаемъ:

$$a^n = n_1, \; n = \mathrm{L}_a n_1;$$

тогда:

$$\lim \, (u_n)^{\frac{1}{n}} \quad \lim \, (n_1 u_{n_1})^{\frac{1}{Ln_1}}$$

и новый признакъ сходимости есть

$$\lim \, (nu_n)^{\frac{1}{Ln_1}} < 1 .$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ или способъ Декарта.

§ 18. *Опредѣленія.* Выраженіе, содержащее члены съ неизвѣстными коэффиціентами, означенными буквами, способными представлять всякія числа, называется выраженіемъ съ неопредѣленными коэффиціентами.

Примѣръ: $y = a + bx + cx^2$.

Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ состоитъ въ пріемахъ опредѣленія величины неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, входящихъ въ выраженія, по различнымъ условіямъ, которымъ должны удовлетворять эти выраженія.

Самое обыкновенное условіе состоитъ въ томъ, что требуется, чтобы выраженіе для данныхъ значеній перемѣнныхъ получало опредѣленную величину.

Примѣръ. Положимъ, что въ вышеприведенномъ примѣрѣ нужно найти величины a, b, c, если при $x = 0, 1, 3$ величина y соотвѣтственно равна 7, 2, 5. Вставляя эти значенія x и y, получаемъ 3 уравненія съ 3-мя неизвѣстными: a, b, c, изъ которыхъ опредѣляемъ эти значенія.

Очевидно, что число данныхъ значеній перемѣнныхъ должно равняться числу коэффиціентовъ.

Такъ для опредѣленія коэффиціентовъ выраженія:

$$z = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

необходимо имѣть по 6 значеній для x, y, z.

§ 19. *Основныя теоремы.*

Теорема 1. *Если два цѣлыхъ полинома одного и того же перемѣннаго равны при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго, считая и нули, то коэффиціенты этихъ полиномовъ равны.*

Дк. Положимъ что:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots \quad A_1+B_1x+C_1x^2+D_1x^3+\ldots \ldots (1)$$

Равенство (1) имѣетъ мѣсто при всякомъ x; полагая $x=0$, найдемъ:
$$A=A_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Вставимъ равенство (2) въ равенство (1):

$$Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots \quad B_1x+C_1x^2+Dx^3+\ldots$$

Такъ какъ x не есть нуль, а можетъ имѣть какое угодно значеніе, то на x можно сократить послѣднее равенство:

$$B+Cx+Dx^2+\ldots=B_1+C_1x+D_1x^2+\ldots$$

Опять даемъ значеніе $x=0$, находимъ:

$$B=B_1.$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что $C=C_1$, $D=D_1$ и т. д.

Теорема 2. *Если многочленъ, расположенный по степенямъ перемѣннаго, тождественно, т. е. для всѣхъ значеній перемѣннаго, равенъ нулю, то и всѣ коэффиціенты его равны нулю.*

Дк.: мы можемъ написать:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=0+0x+0x^2+0x^3+\ldots$$

Откуда на основаніи предыдущей теоремы, найдемъ:

$$A=0; \quad B=0; \quad C=0 \text{ и т. д.}$$

§ 20. Приложеніе способа Декарта.

Задача 1. Найти частное $\dfrac{\alpha+\beta x}{1+\gamma x+\delta x^2}=A+Bx+Cx^2+\ldots$

Рѣшеніе:

$$\alpha+\beta x=(1+\gamma x+\delta x^2)(A+Bx+Cx^2+\ldots)=$$

$$\begin{array}{c|c|l} A+A\gamma & x+A\delta & x^2+\ldots \\ +B & +B\gamma & \\ & +C & \end{array}$$

Откуда: $A=\alpha$; $A\gamma+B=B$; $A\delta+B\gamma+C=0$ и т. д.

Отсюда опредѣляемъ значенія коэффиціентовъ: A, B, $C\ldots$

Задача 2. Извлечь корень $\sqrt{1+x}$.

Рѣшеніе. Положимъ: $\sqrt{1+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots$

$$(1+x)=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots)^2=$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} =A^2+2AB & x+B^2 & x^2+2AD & x^3 \\ & +2AC & +2BC & \text{и т. д.} \end{array}$$

Откуда: $A^2=1$; $2AB=1$; $B^2+2AC=0$; $AD+BC=0$ и т. д.

Изъ этихъ уравненій находимъ коэффиціенты.

Задача 3. Представить выраженіе $\frac{2x+1}{(x-2)(x+5)}$ въ видѣ $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$.

Рѣшеніе: $$\frac{2x+1}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$$

или $$2x+1 = A(x+5)+B(x-2) = (A+B)x+5A-2B$$
$$A+B = 2 \qquad 5A-2B = 1$$
$$A = \frac{5}{7} \qquad B = \frac{9}{7}.$$

Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ распространяется и на полиномы съ нѣсколькими перемѣнными.

Такъ, если:
$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2 = A_1+B_1x+C_1y+D_1x^2+E_1xy+\ldots$$
то $$A = A_1;\ B = B_1;\ C = C_1 \text{ и т. д.}$$

Частное: $\frac{1+x+3y}{2+5x-y}$ представляемъ въ видѣ:
$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2+\ldots$$

Далѣе поступаемъ по примѣру дѣленія полиномовъ съ однимъ неизвѣстнымъ, пользуясь, гдѣ нужно приравниваніемъ коэффиціентовъ по указанному способу.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Элементарная теорія мнимыхъ величинъ.

§ 21. Предварительныя понятія.

Мнимой величиной называется корень четной степени изъ отрицательнаго количества; это—общее опредѣленіе мнимыхъ величинъ; болѣе частное—таково: мнимой величиной называется квадратный корень изъ отрицательнаго количества. Какъ мы увидимъ, нахожденіе корня высшей четной степени изъ отрицательнаго количества сводится къ умѣнію извлекать квадратный корень.

Корень же квадратный изъ отрицательнаго количества сводится къ $\sqrt{-1}$; напр.: $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \cdot -1} = \sqrt{5}\sqrt{-1}$; здѣсь $\sqrt{-5}$ величина дѣйствительная, а $\sqrt{-1}$ —мнимая. Итакъ всякая мнимая величина сводится къ $\sqrt{-1}$. Обыкновенно $\sqrt{-1}$ обозначаютъ черезъ i (Imaqiuaire). Въ общемъ видѣ мнимой величиной называютъ выраженіе, содержащее кромѣ мнимой величины и дѣйствительную, такъ что общій видъ мнимаго количества есть: $a+bi$. Въ этомъ случаѣ ее называютъ также комплексной величиной; a есть дѣйствительная часть комплекснаго количества, bi—мнимая, b—называется коэффиціентомъ мнимой части. Двѣ комплексныя величины, разнящіяся только знакомъ при i называются *сопряженными комплексными величинами.*

§ 22. *Степени i.* Съ мнимыми величинами можно производить всѣ дѣйствія; при изученіи этихъ дѣйствій намъ придется имѣть дѣло со степенями i; потому мы начнемъ съ изученія ихъ. Будемъ возводить $\sqrt{-1}$ въ различныя степени:

$$i=\sqrt{-1}$$
$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$i^3=(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}=-i.$$
$$i^4=(\sqrt{-1})^4=(-1)^2=1.$$
$$i^5=i^4.i=i$$
$$i^6=i^4.i^2=i^2$$
$$i^7=i^4.i^3=i^3$$
$$i^8=i^4.i^4=1$$
$$i^9=i^8.i=i$$
. . . .
. . . .

Такимъ образомъ мы видимъ, что степени i повторяются періодически черезъ 4, т. е., всякая степень i равна i въ степени равной остатку отъ дѣленія первоначальной степени на 4. Если

$$N=4_n+r, \text{ то } i^N=i^r.$$

§ 23. *Дѣйствія надъ комплексными величинами.*

1) Сложеніе. Складываемъ двѣ комплексныхъ величины:

$$a+bi \text{ и } c+di:$$
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i=P+Qi$$

т.-е. отъ сложенія двухъ комплексныхъ величинъ получается величина комплексная.

Частный случай. Сумма двухъ сопряженныхъ комплексныхъ величинъ есть величина дѣйствительная, потому-что коеффиціентъ мнимой части суммы равенъ нулю

$$(a+bi)+(a-bi)=2a.$$

2) Вычитаніе $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i=P+Qi$ т. е. разность двухъ комплексныхъ величинъ—величина комплексная.

Теорема. Если двѣ комплексныя величины равны, то равны между собой ихъ дѣйствительныя части и коеффиціенты при мнимыхъ.

Дано: $a+bi=a_1+b_1i.$

Тр. дк. $a=a_1;\quad b=b_1$

Док. $a+bi=a_1+b_1i.$

Переносимъ дѣйствительныя части налѣво, а мнимыя направо:

$$a-a_1=(b_1-b)i.$$

Возвышаемъ обѣ части равенства въ квадратъ:

$$(a-a_1)^2=(b_1-b)^2.i^2$$

или: $(a-a_1)^2=-(b_1-b)^2$

т. е. $(a-a_1)^2+(b_1-b)^2=0.$

Сумма двухъ положительныхъ количествъ только тогда равна нулю, когда каждое изъ слагаемыхъ равно нулю; отсюда слѣдуетъ:

$$a=a_1;\quad b=b_1,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Если комплексная величина равна нулю, то и коэффиціенты ея равны нулю.

Док. 1-й способъ: $a+bi=0+0i$

$a=0,\quad b=0$

2-й способъ: $a+bi=0$

$a=-bi$

$a^2=-b^2$

$a^2+b^2=0$

$a=0;\ b=0.$

3) Умноженіе:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i=P+Qi$$

т. е. произведеніе комплексныхъ величинъ есть величина комплексная.

Частный случай. Отъ умноженія двухъ сопряженныхъ величинъ получается величина дѣйствительная; (коэффиціентъ при мнимой части равенъ нулю).

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

4) *Возвышеніе въ цѣлую степень* состоитъ изъ ряда умноженій и потому степень есть величина комплексная.

5) *Извлеченіе корня.* Дальше мы покажемъ общій способъ извлеченія корня, а здѣсь разсмотримъ извлеченіе корня только для простѣйшихъ показателей.

Найдемъ $\sqrt{a+bi}$. Положимъ, что результатъ выразился въ комплексной формѣ: $x+yi$; тогда:

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

Возвышаемъ обѣ части уравненія въ квадратъ:

$$a+bi=x^2+2xyi-y^2.$$

По доказанной теоремѣ коэффиціенты равны т. е.

$$a=x^2-y^2 \text{ и } b=2xy.$$

Подставивъ значеніе y изъ второго уравненія въ первое, найдемъ:

$$y=\frac{b}{2x}; \quad a=x^2-\frac{b^2}{4x^2}.$$

или

$$4x^4-4ax^2-b^2=0.$$

Полагаемъ:

$$x^2=z$$

$$4z^2-4az-b^2=0.$$

Откуда:

$$z=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

т. е.

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \text{ и } x^2=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2};$$

Но второе значеніе отрицательно и потому квадратомъ дѣйствительнаго числа x быть не можетъ.

Изъ перваго получаемъ:

$$x_1=+\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}; \quad x_2=-\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Затѣмъ:

$$y_1=+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}; \quad y_2=-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Вставляя эти значенія въ выраженіе: $x+yi$, получимъ два отвѣта, разнящіеся только знакомъ.

Вообще. извлеченіе корня сводится къ рѣшенію уравненія. Такъ:

$$\sqrt[n]{a+bi}=u.$$
$$u^n=a+bi$$
$$u^n-a=bi$$
$$(u^n-a)^2=-b^2$$
$$u^{2n}-2au^n+a^2+b^2=0.$$

Изъ этого параграфа заключаемъ, что результатъ алгебраическихъ дѣйствій надъ комплексными величинами есть величина комплексная.

§ 24. Представленіе мнимыхъ величинъ въ тригонометрической формѣ.

Положимъ: $a=r.\mathrm{Cos}\varphi$ . . . . (1)

и $b=r.\mathrm{Sin}\varphi$ . . . . (2)

Въ такомъ случаѣ:

$a+bi=r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)$ . . . . (3)

Возвышая равенства (1) и (2) въ квадратъ и складывая ихъ, получимъ: $a^2+b^2=r^2(\mathrm{Cos}\varphi^2+\mathrm{Sin}^2\varphi)=r^2$;

откуда: $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Величина r называется модулемъ комплекснаго количества и берется всегда съ положительнымъ знакомъ. Изъ равенства (1):

$$\mathrm{Cos}\varphi=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Изъ равенства (2):

$$\mathrm{Sin}\varphi=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{b}{a} \text{ или } \varphi=\mathrm{arctg}\frac{b}{a}.$$

Уголъ φ называется *амплитудой*.

§ 25. Дѣйствія надъ мнимыми величинами въ тригонометрической формѣ.

Сложеніе.

$$u=r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)$$
$$v=r_1(\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi_1)$$
$$u+v=r\mathrm{Cos}\varphi+r_1\mathrm{Cos}\varphi_1+i(r\mathrm{Sin}\varphi+r_1\mathrm{Sin}\varphi_1)=$$
$$=R(\mathrm{Cos}\psi_1+i\mathrm{Sin}\psi)\ (R\text{—модуль }(u+v))$$

Находимъ модуль R

$$R^2=(r\,\mathrm{Cos}\varphi+r_1\mathrm{Cos}\varphi_1)^2+(r\,\mathrm{Sin}\varphi+r_1\mathrm{Sin}\varphi_1)^2=r^2\mathrm{Cos}^2\varphi+r_1^2\mathrm{Cos}^2\varphi_1+$$
$$+2rr_1\mathrm{Cos}\varphi\mathrm{Cos}\varphi_1+r^2\mathrm{Sin}^2\varphi+r_1^2\mathrm{Sin}^2\varphi_1+2rr_1\mathrm{Sin}\varphi.\mathrm{Sin}\varphi_1=$$
$$=r^2+r_1^2+2rr_1\mathrm{Cos}(\varphi-\varphi_1)$$
$$R=\sqrt{r^2+r_1^2+2rr_1\mathrm{Cos}(\varphi-\varphi_1)}$$

Такъ какъ $\mathrm{Cos}(\varphi-\varphi_1)$ заключается между $+1$ и -1, то:

$$\sqrt{r^2+r_1^2+2rr_1}>R>\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1}$$

или

$$r+r_1>R>r-r_1$$

т. е., модуль суммы заключается между суммой и разностью модулей.

2) Вычитаніе

$$u=r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)$$
$$v=r_1(\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi_1)$$
$$u-v=r\,\mathrm{Cos}\varphi-r_1\mathrm{Cos}\varphi_1+i(r\,\mathrm{Sin}\varphi-r_1\mathrm{Sin}\varphi_1)$$
$$R^2=(r\,\mathrm{Cos}\varphi-r_1\mathrm{Cos}\varphi_1)^2+(r\,\mathrm{Sin}\varphi-r_1\mathrm{Sin}\varphi_1)^2=$$
$$=r_1^2+r^2-2r.r_1\mathrm{Cos}(\varphi-\varphi_1)$$
$$R=\sqrt{r^2+r_1^2-r.r_1\mathrm{Cos}(\varphi-\varphi_1)}\,.$$

Очевидно, что и модуль разности заключается между суммой и разностью модулей.

Итакъ, модуль алгебраической суммы и разности заключается между суммой и разностью модулей.

3) Умноженіе.

$$u=r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)$$
$$v=r_1(\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi_1)$$
$$u.v=rr_1(\mathrm{Cos}\varphi.\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi.\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi_1\mathrm{Cos}\varphi+i^2\mathrm{Sin}\varphi.\mathrm{Sin}\varphi_1)=$$
$$=rr_1[(\mathrm{Cos}\varphi.\mathrm{Cos}\varphi_1-\mathrm{Sin}\varphi.\mathrm{Sin}\varphi_1)+i(\mathrm{Sin}\varphi.\mathrm{Cos}\varphi_1+\mathrm{Sin}\varphi_1\mathrm{Cos}\varphi)]=$$
$$=rr_1[(\mathrm{Cos}(\varphi+\varphi_1)+i\mathrm{Sin}(\varphi+\varphi_1)]=R(\mathrm{Cos}\psi+i\mathrm{Sin}\psi).$$
$$R=r.r_1$$
$$\psi=\varphi+\varphi_1$$

т. е., модуль произведенія равенъ произведенію модулей, а амплитуда произведенія равна суммѣ амплитудъ.

4) Дѣленіе.

$$u=r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi_1)$$
$$v=r_1(\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi_1)$$
$$\frac{u}{v}=\frac{r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)}{r_1(\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi_1)}=R(\mathrm{Cos}\psi+i\mathrm{Sin}\psi)\,.$$
$$r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)=R(\mathrm{Cos}\psi+i\mathrm{Sin}\psi).r_1(\mathrm{Cos}\varphi_1+i\mathrm{Sin}\varphi_1)=$$
$$=Rr_1(\mathrm{Cos}(\varphi_1+\psi)+i\mathrm{Sin}(\varphi_1+\psi)$$
$$r=Rr_1;\quad \varphi=\psi+\varphi_1;$$

откуда:

$$R=\frac{r}{r_1};\ \psi=\varphi-\varphi_1$$

т. е., модуль частнаго равенъ частному модулей, а амплитуда частнаго равна разности амплитудъ.

5) Возвышеніе въ степень.

$$u^n=[r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)]^n=r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)\ldots=$$
$$r^n(\mathrm{Cos}n\varphi+i\mathrm{Sin}n\varphi)=R(\mathrm{Cos}\psi+i\mathrm{Sin}\psi),$$

т. е. модуль степени равенъ степени модулей; амплитуда степени равна произведенію амплитуды на показатель степени.

6) Извлеченіе корня.

$$\sqrt[n]{u}=\sqrt[n]{r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)}=R(\mathrm{Cos}\psi+i\mathrm{Sin}\psi).$$

Взводимъ въ степень n:

$$r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)=R^n(\mathrm{Cos}n\psi+i\mathrm{Sin}n\psi).$$

Откуда:

$$R=\sqrt[n]{r}\ \text{ и }\ \psi=\frac{\varphi}{n}.$$

Слѣдовательно:

$$\sqrt[n]{u}=\sqrt[n]{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{n}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{n}\right)$$

Модуль корня равенъ корню изъ модуля; амплитуда корня равна частному отъ дѣленія амплитуды на показатель.

Правила возвышенія въ степень и извлеченіе корня распространяется и на дробные показатели. (Доказывается разложеніемъ на оба дѣйствія съ цѣлыми показателями).

§ 26. *Слѣдствія.* 1. Квадратный корень имѣетъ два знака. Въ самомъ дѣлѣ

$$\sqrt{r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)}=\sqrt{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{2}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2}\right),$$

но $\mathrm{Cos}\varphi=\mathrm{Cos}(\varphi+2\pi)$ и $\mathrm{Sin}\varphi=\mathrm{Sin}(\varphi+2\pi)$.

Слѣдовательно:

$$\sqrt{r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)}=\sqrt{r(\mathrm{Cos}(\varphi+2\pi)+i\mathrm{Sin}(\varphi+2\pi))}=$$
$$=\sqrt{r}\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)=-\sqrt{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{2}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2}\right).$$

2. Кубическій корень имѣетъ три значенія.

I. $$u_1=\sqrt[3]{r(\mathrm{Cos}\varphi+i\mathrm{Sin}\varphi)}=\sqrt[3]{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{3}\right)$$

II. $$u_2 = \sqrt[3]{r(\mathrm{Cos}(\varphi+2\pi)+i\mathrm{Sin}(\varphi+2\pi))} =$$
$$=\sqrt[3]{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi+2\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$$

III. $$u_3=\sqrt[3]{r(\mathrm{Cos}(\varphi+4\pi)+i\mathrm{Sin}(\varphi+4\pi))}=$$
$$=\sqrt[3]{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi+4\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi+4\pi}{3}\right).$$

Если возьмемъ уголъ: $\varphi+6\pi$, то получимъ:

$$u_4=\sqrt[3]{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi+6\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi+6\pi}{3}\right)=u.$$

Точно также: $u_5=u_2$; $u_6=u_3$; ....

Амплитуды u_2 и u_3 представляютъ изъ себя суммы и потому мы можемъ разложить u_2 и u_3 на произведенія:

$$u_2=\sqrt[3]{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{3}\right)\left(\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}\right)=u_1\alpha,$$

гдѣ $$\alpha=\left(\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$u_3=\sqrt[3]{r}\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{3}\right)\left(\mathrm{Cos}\frac{4\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{3}\right)=u_1\cdot\alpha^2.$$

Посмотримъ, что за величины α и α^2 равное β. Возводимъ α въ кубъ:

$$\alpha^3=\mathrm{Cos}\frac{6\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{6\pi}{3}=1.$$

Точно также:

$$(\alpha^2)^3=\mathrm{Cos}\frac{12\pi}{3}+i\mathrm{Sin}\frac{12\pi}{3}=1,$$

т. е. $\alpha\ \sqrt[3]{1}$ и $\alpha^2\ \sqrt[3]{1}$.

Итакъ, кубическій корень имѣетъ три значенія равныя ариѳметическому значенію, умноженному на три значенія, корня изъ единицы.

Корень кубическій изъ единицы находится и алгебраическимъ путемъ, а именно:

$$\alpha^3=1;\ \alpha^3-1=0;\ (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0.$$

Откуда: $$\alpha_1=1$$
$$\alpha_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$a_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Все сказанное о мнимыхъ (комплексныхъ) величинахъ относится и къ дѣйствительнымъ, такъ какъ онѣ суть частный случай мнимыхъ:

$$a=a(\mathrm{Cos}2\pi+i\mathrm{Sin}2\pi).$$

Если a—отрицательно, то:

$$(-a)=a(\mathrm{Cos}\pi+i\mathrm{Sin}\pi).$$

Подставляя въ выраженіе мнимой величины вмѣсто φ $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi$, $\varphi+6\pi,\ldots\varphi+(n-1)2\pi$, убѣждаемся, что корень степени n имѣетъ n значеній.

§ 27. Геометрическое представленіе комплесныхъ величинъ (черт. 2).

Мнимая величина $a+bi$ изображается точкою M съ абсциссой a и ординатой b; извѣстно, что:

$$r=\sqrt{a^2+b^2};$$

слѣдовательно, модуль есть разстояніе точки отъ начала при Декартовыхъ координатахъ и радіусъ векторъ при полярныхъ.

Такъ какъ $\mathrm{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, то $\varphi=\triangle MOP$ т. е., амплитуда есть уголъ оси x съ линіей, соединяющей точку съ началомъ, а въ полярныхъ координатахъ—амплитуда.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Дифференціальное исчисленіе.

ВВЕДЕНІЕ.

Дифференціальное исчисленіе открыто двумя знаменитыми математиками, жившими въ концѣ XVII вѣка и началѣ XVIII, Лейбницемъ (1646—1715) и Ньютономъ (1642—1727). Въ 1684 году появилась въ журналѣ: „Acta eruditorum“ — небольшая статья Лейбница (всего 6 страницъ), въ которой излагались методы, названные дифференціальнымъ исчисленіемъ.

Статья эта при появленіи осталась незамѣченной; лишь черезъ 10 лѣтъ на нее было обращено вниманіе Гюйгенсомъ.

Но прошло еще столько же времени прежде, чѣмъ была выяснена вся важность вновь открытаго метода; эта послѣдняя заслуга принадлежитъ ученику Лейбница, Ивану Бернулли.

Первый курсъ дифференціальнаго исчисленія появился въ 1696 г. („Analyse des infiniments petits“, par l'Hospital).

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ТЕОРІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Предварительныя свѣдѣнія.

§ 1. Возрастаніе и убываніе функцій.

Функція для даннаго значенія перемѣннаго можетъ быть *возрастающей* и *убывающей*. *Возрастающей* называется функція, которая *увеличивается съ увеличеніемъ перемѣннаго*, или, другими словами, функція, которая при положительномъ приращеніи перемѣннаго получаетъ положительное приращеніе, при отрицательномъ-отрицательное.

Убывающая функція *уменьшается съ увеличеніемъ перемѣннаго*, т. е. получаетъ отрицательное приращеніе при положительномъ приращеніи перемѣннаго и положительное—при отрицательномъ.

Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что, если мы обозначимъ черезъ ε величину, которая можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной, то, въ случаѣ, если $f(x)$ возрастаетъ при $x=a$,

$$f(a+\varepsilon)>f(a)$$
$$f(a-\varepsilon)<f(a)$$

или:

$$f(a+\varepsilon)-f(a)>0$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)<0.$$

Если функція убываетъ при $x=a$, то:

$$f(a+\varepsilon)<f(a)$$
$$f(a-\varepsilon)>f(a)$$

или:

$$f(a+\varepsilon)-f(a)<0$$
$$f(a-\varepsilon)-f(a)>0$$

Примѣры 1) Функція:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

при $x=2$ убываетъ, потому что:

$$f(2+\varepsilon)-f(2)=\frac{1}{2+\varepsilon}-\frac{1}{2}=-\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}<0.$$

2) Функція: $f(x)=\operatorname{Sin}x$

возрастаетъ для значеній x отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ и отъ $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, для значеній отъ $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$—она убываетъ.

Геометрическое значеніе возрастанія и убыванія функціи.

Равенство: $y=f(x)$

представляетъ уравненіе нѣкоторой кривой на плоскости. Если функція возрастаетъ, то, по опредѣленію, y увеличивается съ увеличеніемъ x; кривая подымается съ удаленіемъ отъ начала (черт. 1). Если функція убываетъ, кривая опускается (черт. 2).

§ 2. Прерывность и непрерывность функцій.

Для даннаго значенія перемѣннаго функція можетъ быть *непрерывною и прерывною.*

Непрерывныя функціи обладаютъ свойствомъ измѣняться непрерывно при непрерывномъ измѣненіи главнаго перемѣннаго; прерывныя же могутъ измѣняться только прерывно, скачками, не переходя черезъ промежуточныя значенія.

Функція $f(x)$ непрерывна для значенія $x=a$, если:

$$\lim f(a+\varepsilon)=\lim f(a-\varepsilon)$$ или:

$$\lim[f(a+\varepsilon)-f(a-\varepsilon)]=0.$$

Функція прерывна, если:

$$\lim f(a+\varepsilon)\mp\lim f(a-\varepsilon)$$ или:

$$\lim[f(a+\varepsilon)-f(a-\varepsilon)]\mp 0.$$

Примѣры. 1) Функція

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

прерывается при $x=0$. Дѣйствительно:

$$\lim f(0+\varepsilon)=\lim\frac{1}{\varepsilon}=\infty$$

$$\lim f(0-\varepsilon)=\lim-\frac{1}{\varepsilon}=-\infty$$

2) Функція $y=7+arctg\frac{1}{x-5}$ прерывается при $x=5$; въ самомъ дѣлѣ:

$$f(5+\varepsilon)=7+arctg\frac{1}{\varepsilon}$$

$$f(5-\varepsilon)=7+arctg-\frac{1}{\varepsilon}$$

Перейдя къ предѣлу, будемъ имѣть:

$$\lim f(5+\varepsilon)=7+\frac{\pi}{2}$$

$$\lim f(5-\varepsilon)=7-\frac{\pi}{2}$$

Предѣлы неравны.

Геометрическое значеніе прерывности и непрерывности функціи. Непрерывная функція изображаетъ кривую, состоящую изъ одной вѣтви, напримѣръ: окружность элипсисъ, параболу, синусоиду и т. д. Прерывная функція представляетъ кривую, состоящую изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ вѣтвей, каковы кривыя, представленныя на черт. 3 и 4.

Первая изъ нихъ есть гибербола съ уравненіемъ:

$$y=\sqrt{(x-3)(x-4)}.$$

Очевидно, что для значеній x между 3 и 4 ордината имѣетъ мнимыя значенія, т. е. функція прерывается.

§ 3. Понятіе о безконечно-малыхъ и безконечно-большихъ величинахъ.

Если $\lim\alpha=0$, то α наз. безк. мал. вел., слѣдовательно *безконечно малою* величиною называется величина, *имѣющая предѣломъ нуль. Безконечно-большою* называется величина, *имѣющая предѣломъ безконечность.* Безконечно-малыя, а также и безконечно-большія величины дѣлятся по отношенію другъ къ другу на порядки. Какая-нибудь безконечно-малая величина принимается за основную и считается перваго порядка.

α—безк. мал. 1-го порядка
α^2— „ „ 2-го „
. . . .
α^μ— „ „ μ-го „

Порядкомъ безконечно-малой одночленной величины называется сумма показателей при безконечно-малой перваго порядка; порядкомъ многочленной величины называется наименьшая сумма показателей въ какомъ-нибудь членѣ.

Порядокъ безконечно-большой величины опредѣляется такимъ же образомъ съ тою только разницей, что порядкомъ многочисленной безконечно-большой величины называется найбольшая сумма показателей члена.

Если α—величина безконечно-малая, а Ω—безконечно бельшая, то:

$$\Omega=\frac{1}{\alpha}=\alpha^{-1}$$

Равенство это показываетъ, *что безконечно-большая величина может считаться безконечно-малою отрицательнаго порядка и наоборотъ.*

§ 4. Предѣлъ отношенія безконечно-малыхъ величинъ.

Предѣломъ отношенія безконечно-малыхъ называется одно изъ безконечнаго множества значеній выраженія обращающагося въ $\frac{0}{0}$, которое отличается отъ другихъ величинъ тѣмъ, что къ нему приближаются смежныя величины по мѣрѣ приближенія безконечно-малыхъ къ нулю.

Положимъ, напримѣръ, что:

$$y=\frac{5\alpha+\alpha^2}{3\alpha+3\alpha^2}$$

Если α—безконечно-малая величина, то числитель и знаменатель имѣютъ предѣломъ нуль.

Но предѣлъ отношенія вполнѣ опредѣленъ.

Чтобы найти его, дѣлимъ на α числитель и знаменатель:

$$y=\frac{5+\alpha}{3+3\alpha}$$

Представивъ y въ этомъ видѣ, найдемъ:

$$\lim y=\frac{5}{3}$$

Если предѣлъ отношенія безконечно-малыхъ величинъ — конеченъ, то порядки обѣихъ величинъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k$$

Перейдя отъ предѣла обратно къ приближающимся величинамъ, получимъ:

$$\frac{\alpha}{\beta}=k+\varepsilon$$

гдѣ ε — безконечно-малая. Отсюда.

$$\alpha=k\beta+\varepsilon\beta.$$

Если въ лѣвой части безконечно-малая n-аго порядка, то и въ правой части безконечно-малая того же порядка. Но порядокъ правой части измѣряется членомъ $k\beta$, такъ какъ его порядокъ ниже порядка второго члена (см. пред. §) или порядкомъ β. Итакъ, порядокъ α долженъ быть равенъ порядку β.

Такимъ же образомъ докажемъ, что если.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0,$$

то порядокъ α больше, чѣмъ порядокъ β и если

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty,$$

то порядокъ β больше порядка α.

§ 5. Понятіе о производной и дифференціалѣ.

Условимся обозначать произвольно-малыя приращенія x и y черезъ Δx и Δy; буква Δ въ этомъ случаѣ не изображаетъ количество, а служитъ только нѣкоторымъ символомъ.

Положимъ, что мы имѣемъ функцію:

$$y=f(x)$$

Если мы дадимъ x приращенія Δx, то y получаетъ тоже нѣкоторое приращеніе Δy; написанное уравненіе приметъ видъ:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

Вычтемъ изъ послѣдняго уравненія предыдущее·

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

и раздѣлимъ на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Наконецъ, переходимъ къ предѣлу:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Первая часть полученнаго равенства называется *отношеніемъ дифференціаловъ*.

Слѣдовательно, *дифференціалами* **называются** *такія величины, отношеніе которыхъ равно предѣлу отношенія приращенія функціи къ приращенію перемѣннаго, т. е. предѣлу отношенія безконечно-малыхъ величинъ.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, *что величина дифференціаловъ произвольна,* но, обыкновенно, ихъ считаютъ достигающими предѣла измѣненія т. е. безконечно-малыми.

Отношеніе дифференціаловъ обозначаютъ черезъ $\frac{dy}{dx}$; оно же называется *первой производной.*

Итакъ, *первой производной называется отношеніе дифференціала функціи къ дифференціалу перемѣннаго.* Первая производная обозначается черезъ $f'(x)$ или y'! Иногда ее называютъ также дифференціальнымъ коэффиціентомъ.

Пользуясь введенными обозначеніями, можемъ написать первую формулу дифференціальнаго исчисленія въ видѣ:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ \ldots\ \ldots(1)$$

Изъ этой формулы получаемъ:

$$dy=f'(x)dx$$

т. е. *дифференціалъ функціи равенъ первой производной, умноженной на дифференціалъ независимаго перемѣннаго*

§ 6. *Условія существованія дифференціала и производной.* 1) Для нахожденія дифференціала или производной нужно, чтобы при маломъ приращеніи, перемѣннаго функція получала тоже малое приращеніе т. е. функція должна быть непрерывной. Слѣдовательно, только такія функціи могутъ служить предметомъ изученія Анализа. Что же касается функцій прерывныхъ, то онѣ изучаются Аритмологіей. Неимѣніе производной представляетъ существенное различіе прерывной функціи отъ непрерывной и можетъ быть положено въ основаніе опредѣленія прерывной функціи. 2) Необходимо, чтобы можно было перейти къ предѣлу, т. е. функція должна имѣть предѣлъ. Такія функціи называются *аналитическими* въ отличіе отъ *неаналитическихъ* не имѣющихъ предѣла, и производной.

---

*) Дифф. исчисл. проф. Бугаева.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Дифференцированіе функціи одного независимаго перемѣннаго.

§ 7. Дифференціалъ постояннаго.

Положимъ, что: $y=a$

Можемъ написать: $y=a\,.\,x^0$

Если дадимъ x приращеніе $\Delta x, y$ получитъ нѣкоторое приращеніе Δy: $y+\Delta y=a(x+\Delta x)^0$

Замѣтивъ, что $(x+\Delta x)^0$ есть единица, получимъ по вычитаніи изъ этого равенства начальнаго $(y=a)$:

$$\Delta y=0$$

Дѣлимъ это равенство на Δx и переходимъ къ предѣлу:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{da}{dx}=0.$$

Итакъ *и производная постояннаго равна нулю*. Равенство нулю, производной даетъ также:

$$dy=da=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

т. е. *дифференціалъ постояннаго также равенъ нулю.*

§ 8. Дифференцированіе независимаго перемѣннаго. Найдемъ дифференціалъ и производную независимаго перемѣннаго x, т. е. функціи: $y=x.$

Давъ x приращеніе Δx, имѣемъ:

$$y+\Delta y=x+\Delta x.$$

Вычитаемъ изъ второго равенства первое—:

$$\Delta y=\Delta x.$$

Дѣлимъ обѣ части на Δx и беремъ ихъ предѣлы:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=1.$$

Полученное равенство показываетъ, что *производная независимаго перемѣннаго x равна единицѣ.* Изъ того же равенства слѣдуетъ:

$$dy=dx,$$

что, конечно, и слѣдовало ожидать.

§ 9. Дифференціалъ суммы функцій.

Пусть: $y=u+v,$

гдѣ u и v—нѣкоторыя функціи x. Если x получить приращеніе Δx, эти функціи получать соотвѣтственныя приращенія Δu и Δv; сумма y получитъ тоже приращеніе Δy, такъ; что:
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v).$$

Дѣлаемъ почленное вычитаніе равенствъ и дѣлимъ разность на Δx:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Въ предѣлѣ—имѣемъ:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$
$$dy=du+dv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
т. е. производная суммы равна суммѣ производныхъ слагаемыхъ, дифференціалъ смуны равенъ суммѣ дифференціаловъ слагаемыхъ.

Доказательство остается въ силѣ и для произвольнаго числа слагаемыхъ.

§ 10. Дифференціалъ произведенія функціи на постоянное.

Пусть дифференцируемая функція имѣетъ видъ:
$$y=au,$$
причемъ u есть функція x, множитель a—постоянное. Когда x получаетъ приращеніе, u тоже получаетъ приращеніе Δu; постоянное—a—не получаетъ приращенія; y получаетъ приращеніе Δy, такъ что:
$$y+\Delta y=a(u+\Delta u)=au+a\Delta u.$$

Вычитаемъ данное равенство:
$$\Delta y=a\Delta u;$$
дѣленіе на Δx и переходъ къ предѣлу приводятъ къ результату:
$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim a\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
или
$$\frac{dy}{dx}=a\frac{du}{dx}$$
$$dy=d(au)=adu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Мы видимъ, что постоянное можно выносить (и обратно—вносить) за знакъ дифференціала.

§ 11. Дифференціалъ произведенія функцій.

Разсмотримъ сначала случай двухъ множителей:
$$z=uv.$$

Давая u и v приращенія, получимъ:

$$z+\Delta z=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta v\Delta u.$$

Вычитаемъ данное равенство:

$$\Delta z=u\Delta v+v\Delta u+\Delta v\,.\,\Delta u,$$

дѣлимъ на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и переходимъ къ предѣлу; предѣ $\Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ равенъ 0, такъ какъ

$\lim\Delta u=0$, а $\lim\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$—величина конечная.

Получимъ слѣдовательно:

$$\frac{dz}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$dz=d(uv)=udv+vdu; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

словами—результатъ выразится такъ: *дифференціалъ произведенія двухъ функцій равенъ суммѣ произведенія первой на дифференціалъ второй и произведенія второй на дифференціалъ первой.*

Обратимся теперь къ случаю произвольнаго числа множителей. Для простоты разсужденія разсмотримъ произведеніе трехъ множителей, хотя доказательство справедливо и для всякаго числа n.

Пусть дана функція:

$$z=u\,.\,v\,.\,t.$$

Соединивъ u и v въ одинъ множитель, продифференцируемъ данную функцію, какъ состоящую изъ двухъ множителей:

$$d(u.v.t)=uvdt+td(uv).$$

Во второй членъ входитъ дифференціалъ произведенія, который можемъ разложить:

$$d(uvt)=uvdt+t(udv+vdu)=uvdt+tudv+vtdu.$$

Итакъ, *дифференціалъ произведенія равенъ суммѣ дифференціаловъ, соотвѣтственно умноженныхъ на всѣ остальные множители.*

§ 12. Дифференціалъ частнаго двухъ функцій.

Найдемъ дифференціалъ функціи:

$$z=\frac{u}{v}.$$

Написавъ равенство, связывающее приращенныя функціи, и, вычтя начальное, получимъ:

$$\Delta z = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv+v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Замѣняемъ нулемъ $uv - uv$ и дѣлимъ выраженіе на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Переходя къ предѣлу, замѣтимъ, что въ знаменателѣ правой части получится v^2, такъ что:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$dz = d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Слѣдовательно, *дифференціалъ частнаго ра...нъ разности между произведеніемъ знаменателя на дифференціалъ числителя и произведеніемъ числителя на дифференціалъ знаменателя, дѣленной на квадратъ знаменателя.*

§ 13. Дифференціалъ цѣлой степени.

Разсмотримъ прежде всего случай положительной степени:

$$y = x^m.$$

Давъ перемѣнному x приращеніе, разложимъ степень по правилу бинома Ньютона:

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^m = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots,$$

Повторяя уже нѣсколько разъ изложенные пріемы, придемъ къ выраженію:

$$\frac{\Delta y}{\Delta y} = mx^{m-1} + \frac{(m-1)m}{1.2}x^{m-2}\Delta x + \ldots$$

Въ предѣлѣ получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$dy = d(x^m) = mx^{m-1}dx \ldots\ldots\ldots (7)$$

т. е. *дифференціалъ цѣлой положительной степени равенъ показателю, умноженному на возвышаемое количество въ степени на единицу низшей и на его дифференціалъ.*

Положимъ теперь, что степень отрицательна:

$$y=x^{-m}$$

Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ равенство:

$$yx^{m}=1.$$

Найдемъ дифференціалъ лѣвой части этого равенства; дифференцируемъ его сначала, какъ произведеніе:

$$d(yx^{m})=x^{m}dy+yd(x^{m});$$

дифференцируемъ затѣмъ положительную степень, заключающуюся во второмъ слагаемомъ:

$$d(yx^{m})=x^{m}dy+ymx^{m-1}dx$$

Но такъ какъ $(yx)^{m}$ есть постоянная (единица), то дифференціалъ его долженъ равняться нулю (§ 7):

$$x^{m}dy+ymx^{m-1}dx=0.$$

Вставляемъ во второе слагаемое лѣвой части значеніе y;

$$x^{m}dy+x^{-m}mx^{m-1}dx=0.$$

Откуда:

$$dy=-\frac{x^{-m}mx^{m-1}}{x^{m}}dx=-mx^{-m-1}dx.$$

То же выраженіе для dy мы получимъ, замѣнивъ m черезъ $-m$ въ формулѣ (7); поэтому заключаемъ, что изложенное выше правило справедливо и для отрицательной степени.

§ 14. Дифференціалъ корня (дробной степени).

Докажемъ, что дифференцированіе дробной степени совершается по тому же правилу, какъ и дифференцированіе цѣлой.—Возьмемъ функцію:

$$y=x^{\frac{p}{q}}.$$

Представимъ написанное равенство въ видѣ:

$$y^{q}=x^{p},$$

и найдемъ дифференціалы обѣихъ частей; дифференціалы равныхъ количествъ, очевидно, будутъ равны, вслѣдствіе чего получаемъ

$$qy^{q-1}dy=px^{p-1}dx.$$

Отсюда:

$$dy=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}dx=\frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}dx=\frac{p}{q}x^{p-1-p+\frac{p}{q}}dx.$$

$$dy=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx.$$

Послѣднее равенство выражаетъ то, что и требовалось доказать.

§ 15. Дифференціалъ показательной функціи.

Ознакомившись съ дифференцированіемъ алгебрическихъ функцій, перейдемъ къ дифференцированію трасцендентныхъ. Одна изъ простѣйшихъ функцій этого класса есть показательная, имѣющая видъ:

$$y=a^x.$$

Ведя разсужденія по извѣстному образцу, получимъ послѣдовательно равенства:

$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=a^x\lim\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Такъ какъ $a^{\Delta x}$ стремится къ единицѣ, то числитель выраженія $a^{\Delta x}-1$ есть величина безконечно-малая.

Назовемъ ее α; тогда:

$$a^{\Delta x}=1+\alpha.$$

Обозначая черезъ L_a логариѳмъ при основаніи a, получимъ изъ этого равенства, прологариѳмировавъ это выраженіе:

$$\Delta x=L_a(1+\alpha).$$

Предѣлъ отношенія, входящій въ выраженіе производной, принимаетъ видъ:

$$\lim\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim\frac{\alpha}{L_a(1+\alpha)}=\lim\frac{1}{\frac{1}{\alpha}L_a(1+\alpha)}=\lim\frac{1}{L_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Предѣлъ выраженія $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ можетъ быть вычисленъ.

Разложимъ выраженіе по правилу бинома Ньютона:

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=1+\frac{1}{\alpha}\alpha+\frac{\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{1.2.}\alpha^2+\frac{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\alpha}-2\right)}{1.2.3}\alpha^3+\ldots=$$

$$=1+1+\frac{1(1-\alpha)}{1.2}+\frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{1.2.3}+\ldots$$

Предѣлъ его есть:

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots=e.$$

Сумма выписаннаго ряда, обозначаемая буквой e, играетъ большую роль въ Анализѣ. Она представляетъ собою основаніе такъ называемыхъ *натуральныхъ* или *Непперовыхъ логариѳмовъ*.. Численная величина ея съ точностью до десяти знаковъ равна

$$l=2,7182818284.$$

Такимъ образомъ

$$\lim\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{1}{L_a e}$$

и производная выражается такъ:

$$\frac{dy}{dx}=a^x\frac{1}{L_a e}=\frac{a^x}{L_a e};$$

отсюда $$dy=\frac{a^x}{L_a e}\ldots\ldots\ldots(9)$$

Обозначая черезъ l логариѳмъ при основаніи e, мы имѣемъ тождество: $$L_a e la=e;\ldots\ldots\ldots(10)$$

слѣдовательно, равенство (9) можно замѣнить выраженіемъ:

$$dy=a^x ladx\ldots\ldots\ldots(9^1)$$

Частный случай. Найдемъ производную функцію:

$$y=e^x,$$

гдѣ e — основаніе натуральныхъ логариѳмовъ. Принимая формулу (9^1), получимъ.

$$de^x=e^x.1\ dx=e^x dx$$

и отсюда $$\frac{de^x}{dx}=e^x\ldots\ldots\ldots(11)$$

т. е. *производная e^x равна самой функціи.*

§ 16. Дифференціалъ логариѳма.

Пусть $$y=L_a x.$$

Пользуясь обычнымъ методомъ, получимъ послѣдовательно (для краткости обозначеній спускаемъ вездѣ индексъ a при L):

$$\Delta y=L(x+\Delta x)-Lx=L\frac{x+\Delta x}{x}=L\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{L\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{L\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Обозначая $\frac{\Delta x}{x}$ черезъ α получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\lim\frac{L(1+\alpha)}{\alpha x}=\frac{1}{x}\lim\frac{1}{\alpha}L(1+\alpha)=\frac{1}{x}\lim L(1+\alpha)^{1/\alpha}=\frac{Le}{x}$$

$$dLx=\frac{Le}{x}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

или, что тоже: $$dLx=\frac{dx}{xla} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12^1)$$

Частный случай. Положимъ, что основаніемъ логариѳмовъ служитъ e, въ такомъ случаѣ:

$$dlx=\frac{dx}{x.1}=\frac{dx}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

$$\frac{dlx}{dx}=\frac{1}{x}$$

§ 17. Дифференціалы тригонометрическихъ функцій.

1) **Синусъ** (Sin).

Если мы имѣемъ функцію.

$$y=\mathrm{Sin}x,$$

то: $$y+\Delta y=\mathrm{Sin}(x+\Delta x),$$

откуда: $\Delta y=\mathrm{Sin}(x+\Delta x)-\mathrm{Sin}x=\mathrm{Sin}x.\mathrm{Cos}\Delta x+\mathrm{Cos}x\mathrm{Sin}\Delta x-\mathrm{Sin}x$; вынеся $-\mathrm{Sin}x$ за скобки, имѣемъ: $-\mathrm{Sin}x(1-\mathrm{Cos}\Delta x)+\mathrm{Cos}x.\mathrm{Sin}\Delta x$.

Такъ какъ $1-\mathrm{Cos}\Delta x=2\mathrm{Sin}^2\frac{\Delta x}{2}$, то $\mathrm{Sin}x(1-\mathrm{Cos}\Delta x)+\mathrm{Cos}x.$ $.\mathrm{Sin}\Delta x=-2\mathrm{Sin}x.\mathrm{Sin}^2\frac{\Delta x}{2}+\mathrm{Cos}x.\mathrm{Sin}\Delta x$;

откуда $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\mathrm{Sin}x\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}+\mathrm{Cos}x\frac{\mathrm{Sin}\Delta x}{\Delta x}.$$

Такъ какъ: $$\lim\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=0. \quad \text{и} \quad \lim\frac{\mathrm{Sin}\Delta x}{\Delta x}=1,$$

то $$\frac{dy}{dx}=\mathrm{Cos};\ dy=\mathrm{Cos}xdx$$

2) Косинусъ (Cos) Замѣнимъ косинусъ синусомъ угла дополнительнаго до $\frac{\pi}{2}$

$$y=\mathrm{Cos}x=\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Дифференцируемъ синусъ:

$$dy=d\left(\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\mathrm{Sin}x\left(d\frac{\pi}{2}-dx\right)=$$
$$=-\mathrm{Sin}xdx,$$

Итакъ $$dy=d\mathrm{Cos}x=-\mathrm{Sin}xdx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

3) Тангенсъ (tg). Чтобы найти дифференціалъ функціи

$$y=\mathrm{tg}x;$$

представляемъ ее въ видѣ частнаго $\frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x}$ и дифференцируемъ, какъ частное (§ 12):

$$dy=\frac{\mathrm{Cos}xd\mathrm{Sin}x-\mathrm{Sin}x.d\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Cos}^2x}=\frac{\mathrm{Cos}x.\mathrm{Cos}x.dx+\mathrm{Sin}x.\mathrm{Sin}xdx}{\mathrm{Cos}^2x}=$$
$$=\frac{dx}{\mathrm{Cos}^2x}$$
$$d\mathrm{tg}x=\frac{dx}{\mathrm{Cos}^2g}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

4) Котангенсъ (Ctg) Для нахожденія дифференціала функціи: $$y=\mathrm{Ctg}x,$$
поступаемъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ:

$$dy=d\frac{\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sin}x}=\frac{\mathrm{Sin}xd\mathrm{Cos}x-\mathrm{Cos}xd\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Sin}^2x}=\frac{\mathrm{Sin}x\mathrm{Sin}xdx-\mathrm{Cos}x\mathrm{Cos}xdx}{\mathrm{Siu}^2x}$$
$$dy=\frac{dx}{\mathrm{Sin}^2x}$$
$$d\mathrm{Ctg}x=-\frac{dx}{\mathrm{Sin}^2x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

§ 18. Дифференціалы обратныхъ (круговыхъ) тригонометрическихъ функцій.

1) Arcus Sinus (arc.Sin). Если

$$y=\mathrm{arc.Sin}x,$$
то $$x=\mathrm{Sin}y$$

Дифференцируемъ послѣднее равенство:

$$dx=\mathrm{Cos}y.dy;$$

отсюда $$dy=\frac{dx}{\mathrm{Cos}y}=\frac{dx}{\sqrt{1-\mathrm{Sin}^2y}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е. $$d.\mathrm{arcSin}x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(18)$$

2) Arcus Cosinus (arcCos). Если дана функція:

$$y=\mathrm{arc.Cos}x,$$

то подобно предыдущему

$$x=\mathrm{Cos}y$$

$$dx=-\mathrm{Sin}y dy$$

$$dy=-\frac{dx}{\mathrm{Sin}y}=-\frac{dx}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2y}}=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\dots\dots(19)$$

3) Arcus tangens (arctg). Положимъ, что:

$$y=\mathrm{arc\,tg}x$$

Имѣемъ $$x=\mathrm{tg}y.$$

Дифференцированіе даетъ:

$$dx=\frac{dy}{\mathrm{Cos}^2y}=(1+\mathrm{tg}^2y)dy=(1+x^2)dy$$

$$dy=d\mathrm{arctg}x=\frac{dx}{1+x^2}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(20)$$

4) Arcus cotangens (arc ctg).

Пусть $$y=\mathrm{arc\,ctg}x,$$

тогда: $$x=\mathrm{Ctg}y$$

$$dx=-\frac{dy}{\mathrm{Sin}^2y}=-(1+\mathrm{Ctg}^2y)dy=-(1+x^2)dy.$$

$$dy=\mathrm{arc\,Ctg}x=-\frac{dx}{1+x^2}\dots\dots\dots\dots\dots(21)$$

§ 19. *Дифференцированіе сложныхъ функцій (теорема Лагранжа).*

Теорема: *Производная сложной функціи равна произведенію производныхъ функцій, входящихъ въ составъ сложной*, т. е.

$$\frac{df(\varphi x)}{dx}=f'(\varphi x)\varphi'(x)$$

или $$df(\varphi x)=f'(\varphi y)\varphi'(x)dx,$$

гдѣ φ и f символы функцій.

Док.: Будемъ считать $\varphi(x)$ за одно перемѣнное; тогда:

$$df(\varphi x)=f'(\varphi x)d\varphi x$$

Прадифференцируемъ затѣмъ φx:

$$d\varphi x=\varphi' x dx$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$df(\varphi x)=f'(\varphi x)\varphi'd.dx$$

$$\frac{df(\varphi x)}{dx}=f'(\varphi x)\varphi'x.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функцій одного перемѣннаго.

§ 20. *Опредѣленія и обозначенія. Второю производною называется производная первой производной, третьей—производная второй и т. д.*

Вторымъ дифференціаломъ называется дифференціалъ перваго дифференціала, третьимъ—дифференціалъ второго и т. д.

Для высшихъ производныхъ такъ же, какъ и для первыхъ, существуютъ два обозначенія. Во-первыхъ, употребляются символы:

$$f''(x); f'''(x),\ f^{IV}(x),\ldots\ldots f^{(n)}(x),\ldots\ldots$$

$$y'',\ y''',\ y^{IV},\ldots\ldots y^{(n)},\ldots\ldots$$

Согласно опредѣленію:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}$$

$$f''(x)=y''=\frac{dy'}{dx}$$

$$f'''(x)=y'''=\frac{dy''}{dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{dy(n-1)}{dx}.$$

Отсюда для дифференціаловъ получаемъ выраженія:

$$dy=f'(x)dx=y'dx$$

$$dy'=f''(x)dx=y''dx$$

$$dy''=f'''(x)dx=y'''dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dy^{(n-1)}=f^{(n)}(x)dx=y^{(n)}dx.$$

Чтобы получить высшія производныя и дифференціалы въ другомъ видѣ, дифференцируемъ равенство. $dy=y'dx$ нѣсколько разъ послѣдовательно. Дифференціалы y второй, третій,........ n-ый обозначаемъ черезъ: $d^2y,\ d^3y,\ldots.d^ny,$
степень dx вторую, третью и т. д. обозначаемъ:

$$dx^2,\ dx^3,\ldots.dx^n.$$

Производя оказанное дифференцированіе, и, замѣтивъ, что:

$$d^2x=d(dx)=d(\text{Const.})=0,$$

получимъ:

$$d^2y=d(y'dx)=dy'dx+y'd^2x=y''dx.dx=y''dx^2$$
$$d^3y=d(y''dx^2)=dy''dx^2+2y''d^2x=y'''dx^2dx=y'''dx^3$$
$$d^4y=d(y'''dx^3)=dy'''dx^3+3y'''d^2x=y^{IV}dx^3dx=y^{IV}dx^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^{(n)}y= \qquad\qquad\qquad =d^{(n)}dx^n.$$

Отсюда:

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$y^{IV}=f^{IV}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Полученные результаты представляютъ собою вторыя выраженія производныхъ.

§ 21. Высшія производныя степени.

Дается функція $y=x^m$;
требуется найти выраженіе n-ой производной. Для рѣшенія этой задачи выписываемъ нѣсколько послѣдовательныхъ производныхъ.

$$y'=mx^{m-1}$$
$$y''=m(m-1)x^{m-2}$$
$$y'''=m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Законъ, по которому онѣ составляются, ясенъ:—

$$y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots.(m-\overline{n-1})x^{m-n}$$

(обозначеніе $m-\overline{n-1}$ употребляется иногда вмѣсто $m-(n-1)$).

Если степень *положительная цѣлая*, то при повтореніи дифференцированія мы дойдемъ до случая, когда производная выразится постояннымъ, т. е. x войдетъ въ нулевой степени. Изъ формулы n-ой производной видимъ, что это будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда $n=m$.

Итакъ: $$y^{(m)}=m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1=m!$$

$m+1$-ая производная равна нулю, какъ производная постояннаго; всѣ слѣдующія производныя тоже нули. Если степень отрицательная или дробная, то ни одна изъ производныхъ не обращается въ нуль.

§ 22. Высшія производныя показательной функціи.

Найдемъ n-ую производную показательной функціи:

$$y=a^x.$$

Составляемъ нѣсколько производныхъ:

$$y'=a^x la$$

$$y''=laa^x la=a^x(la)^2$$

$$y'''=(la)^2a^x la=a^x(la)^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Очевидно, что: $$y^{(n)}=a^x(la)^n.$$

Частные случаи: 1) пусть:

$$y=e^x.$$

Имѣемъ:

$$y'=e^x$$

$$y''=e^x$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}=e^x.$$

2) Положимъ, что $$y=e^{mx},$$

тогда: $$y'=\frac{d(e^m)^x}{dx}=e^{mx}le^m=me^{mx}$$

$$y''=m\frac{d(e^m)^x}{dx}=m^2e^{mx}$$

и наконецъ: $$y^{(n)}=m^ne^{mx}.$$

§ 23. Высшія производныя тригонометрическихъ функцій.

1) Синусъ.

Дано: $$y=\mathrm{Sin}x.$$

Составляемъ рядъ производныхъ:

$$y'=\mathrm{Cos}x=\mathrm{Sin}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-\mathrm{Sin}x=\mathrm{Sin}\left(x+2\frac{\pi}{2}\right).$$

$$y''' = -\mathrm{Cos}x = \mathrm{Sin}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = \mathrm{Sin}x = \mathrm{Sin}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{V} = \mathrm{Cos}x = \mathrm{Sin}\left(x + 5\frac{\pi}{2}\right).$$

Вообще: $$y^{(n)} = \mathrm{Sin}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Замѣтимъ, что рядъ производныхъ функціи $\mathrm{Sin}x$ *періодиченъ;* производныя имѣютъ только четыре значенія, которыя повторяются въ опредѣленномъ порядкѣ; такъ:

$$y^{IV} = y,\ y^{V} = y',\ y^{VI} = y'',\ y^{VII} = y''',\ y^{VIII} = y, \ldots$$

2. Косинусъ. Высшія производныя функціи:

$$y = \mathrm{Cos}x$$

имѣють такой же характеръ, какъ и производная $\mathrm{Sin}x$.

Получаемъ послѣдовательно:

$$y' = -\mathrm{Sin}x = \mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \mathrm{Sin}x = \mathrm{Cos}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = \mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . .

и, наконецъ: $$y^{(n)} = \mathrm{Cos}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

§ 24. Высшія производныя произведенія функцій (теорема Лейбница).

Положимъ, что дана функція:

$$y = u \cdot v,$$

гдѣ u и v—функціи x. Напишемъ нѣсколько производныхъ:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2(uv)}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2} =$$

$$= u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{d^3(uv)}{dx^3} = u\frac{d^3v}{dx^3} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 2\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} +$$
$$+ \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dv}{dx} + v\frac{d^3u}{dx^3} = u\frac{d^3v}{dx^3} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^3u}{dx^3}$$

. . . .

. . . .

Законъ составленія производной не трудно замѣтить. Именно, въ каждый членъ входятъ производныя по u и по v (если функціи u и v можно считать нулевыми производными); сумма порядковъ обѣихъ производныхъ вездѣ одна и та же, и равна порядку производной uv; порядокъ производныхъ u возрастаетъ, порядокъ производныхъ v убываетъ. Остается опредѣлить численные коэффиціенты членовъ. Мы сейчасъ докажемъ, что эти коэффиціенты—биноміальные. Замѣтивъ, что они не зависятъ отъ вида функцій u и v, возьмемъ для этихъ функцій нѣкоторыя частныя значенія; именно, пусть:

$$u = e^x$$
$$v = e^{\beta x}.$$

Обозначимъ искомые коэффиціенты черезъ A_0, A_1, A_2, ... A_n, тогда по доказанному:

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = A_0 u\frac{d^nv}{dx^n} + A_1\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + A_2\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \ldots$$

или, подставляя значенія u и v:

$$\frac{d^n e^{(1+\beta)x}}{dx^n} = A_0 e^x\frac{d^n e^{\beta x}}{dx^n} + A_1\frac{de^x}{dx}\frac{d^{n-1}e^{\beta x}}{dx^{n-1}} + A_2\frac{d^2e^x}{dx^2}\frac{d^{n-2}e^{\beta x}}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots$$

Выражаетъ по извѣстнымъ законамъ, всѣ производныя:

$$(1+\beta)^n e^{(1+\beta)x} = A_0 e^x \beta^n e^{\beta x} + A_1 e^x \beta^{n-1} e^{\beta x} + A_2 e^x \beta^{n-2} e^{\beta x} + \ldots =$$
$$= A_0 \beta^n e^{(1+\beta)x} + A_1 \beta^{n-1} e^{(\beta+1)x} + A_0 e^{(1+\beta)x} \beta^{n+2} + \ldots$$

По сокращеніи на $e^{(1+\beta)x}$, получаемъ:

$$(1+\beta)^n = A_0\beta^n + A_1\beta^{n-1} + A_2\beta^{n-2} + \ldots\ldots$$

или:

$$\beta^n + n\beta^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta^{n-2} + \ldots = A_0\beta^n + A_1\beta^{n-1} + A_2\beta^{n-2} + \ldots$$

Отсюда по правилу неопредѣленныхъ коэфиціентовъ имѣемъ:

$$A_0 = 1$$
$$A_1 = n$$

$$A_2=\frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$A_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Слѣдовательно, A_0, A_1, A_2,.... —биноміальные коэффиценты.

Примѣръ. Пусть требуется найти третью производную функціи:

$$y=e^x x^4.$$

Находимъ:

$$\frac{d^3(x^4e^x)}{dx^3}=e^x4.3.2x+3e^x4.3.x^2+3e^x4x^3+e^xx^4=$$

$$=(24x+36x^2+12x^3+x^4)e^x.$$

§ 25. Перемѣна главнаго перемѣннаго.

До сихъ поръ главнымъ (независимымъ) перемѣннымъ мы считали то перемѣнное x, по которому дифференцировали. При этомъ мы имѣли всегда (§ 20): $d^2x=0$.

Но возможны случаи, когда x не главное перемѣнное, а само есть нѣкоторая функція другого. Въ этомъ случаѣ dx есть тоже функція этого перемѣннаго, и, слѣдовательно:

$$d^2x\neq 0.$$

Найдемъ выраженіе второго дифференціала и производной въ случаѣ, если x—не главное перемѣнное:

$$d^2y=ddy=d(y'dx)=dy'dx+y'd^2x$$

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}.$$

Эти формулы, выражая собою второй дифференціалъ и вторую производную при произвольномъ главномъ перемѣнномъ, прилагаются и къ случаю главнаго перемѣннаго x, какъ къ частному случаю. Дѣйствительно, положивъ, что x главное перемѣнное, причемъ: $d^2x=0$, замѣтимъ, что вторая производная принимаетъ видъ.

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Если главнымъ перемѣннымъ считается y, то $d^2y=0$, и

$$y''=-\frac{dy.d^2x}{dx^3}.$$

Формулы для слѣдующихъ по порядку производныхъ получаются все сложнѣе и сложнѣе.

Для примѣра вычислимъ еще третью производную:

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{dx^3d(dxd^2y - d^2xdy) -}{dx^7}$$

$$\frac{-(dxd^2y - dyd^2x)ddx^3}{dx^7} = \frac{dx^3(d^2xd^2y + dxd^3y - d^2yd^2x - dyd^3x) -}{dx^7}$$

$$\frac{-(dxd^2y - dyd^2x)3dx^2d^2x}{dx^7} =$$

$$= \frac{dx^2d^3y - dxdyd^3x - 3dxd^2xd^2y + 3dyd^2x^2}{dx^5}$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Нѣкоторыя соотношенія между функціей и ея производными.

§ 26. *Вліяніе знака производной.*

Теорема. *Если функція $f(x)$ непрерывна въ смежности $x = a$, то она будетъ для этого значенія перемѣннаго возрастающею или убывающею смотря по тому, будетъ ли производная ея $f'(x)$ положительна или отрицательна для этого значенія перемѣннаго.*

Док.: Возрастающая функція получаетъ приращеніе (Δy), равнозначное съ приращеніемъ перемѣннаго (Δx), т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = +;$$

слѣдовательно, $$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = +.$$

Въ случаѣ убывающей функціи

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -$$

и $$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = -.$$

Обратимъ вниманіе на геометрическое значеніе первой производной. Построимъ возрастающую кривую (черт. 5).

$$y = f(x)$$

Взявъ нѣкоторое значеніе x, равное OP, найдемъ соотвѣтствующее значеніе y, равное MP. Дадимъ x приращеніе:

$$\Delta x = PP' = MQ;$$

тогда y получитъ приращеніе:

$$\Delta y = M'Q$$

Соединивъ точки M и M' прямой линіей, получимъ прямоугольный треугольникъ съ катетами Δx и Δy, изъ этого треугольника:

$$\frac{M'Q}{MQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} M'MQ = \operatorname{tg} MEx.$$

Будемъ переходить къ предѣлу. Δx и Δy будутъ все время уменьшаться и отношеніе ихъ въ предѣлѣ сдѣлается равнымъ $\frac{dy}{dx}$. Точки M и M' будутъ сближаться; соединяющая ихъ сѣкущая все ближе будетъ подходить къ касательной въ точкѣ M и въ предѣлѣ съ ней сольется; уголъ сѣкущей съ осью x обратится въ уголъ $MFx = T$, уголъ касательной съ осью x. Равенство въ предѣлѣ приметъ видъ:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} T,$$

т. е. *первая производная равна тангенсу угла касательной съ положительнымъ направленіемъ оси x.* Изъ чертежа мы видимъ, что въ случаѣ возрастающей функціи этотъ уголъ острый, тангенсъ его положителенъ и теорема оправдывается. Чертежъ 6, изображающій кривую, соотвѣтствующую убывающей функціи, показываетъ, что тангенсъ угла касательной въ этомъ случаѣ согласно теоремѣ отрицателенъ.

Примѣръ: $\operatorname{Sin} x = y$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$
$y = \operatorname{Sin} x$	возр.	возр.		убыв.	убыв.	убыв.	возр.
$f(x) = \operatorname{Cos} x$	1		0		-1		0

§ 27. Основная теорема Коши.

Теорема. Если α) двѣ функціи: $f(x)$ и $F(x)$ обращаются въ нуль при $x = a$, β) $f(x)$ и $F(x)$, $f'(x)$ и $F'(x)$ остаются конечными и непрерывными для значеній x въ промежуткѣ отъ $x = a$ до $x = a + h$ и γ) если $F'(x)$ не мѣняетъ своего знака въ этомъ промежуткѣ, то величина дроби $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ заключается между наибольшей и наименьшей величиной и дроби, составленной изъ производныхъ $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ для того же значенія перемѣннаго, т. е.

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+Qh)}{F'(a+Qh)},$$

гдѣ Q есть правильная дробь, заключающаяся между нулемъ и единицей.

Док.: положимъ, что:

$$\text{Max.:}\ \frac{f'(x)}{F'(x)}=M \text{ и } \min\frac{f'(x)}{F'(x)}=m;$$

тогда:

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}<M$$

и

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}>m.$$

Дальше,—доказательство раздѣляется:

I случай $\qquad F'(x)=+$

Помноживъ на $F'(x)$ предыдущія неравенства, получимъ:

$$f'(x)<MF'(x) \qquad f'(x)>mF'(x)$$

$$f'(x)-MF'(x)<0 \qquad f'(x)-mF'(x)>0$$

Лѣвыя части послѣднихъ неравенствъ суть производныя отъ функцій

$$f(x)-MF(x) \qquad f(x)-mF(x).$$

По теоремѣ § 20 первая изъ нихъ—убывающая, вторая—возрастающая. По условію: $f(a)-MF(a)=0 \qquad f(a)-mF(a)=0$

По только что выведенному

$$f(a+h)-MF(a+h)<0 \qquad f(a+h)-mF(a+h)>0$$

$F(a+h)$—положительна, потому что $F(a)=0$, а $F(x)$ возрастаетъ: (это слѣдуетъ изъ того, что $F'(x)=+$) Поэтому, дѣля неравенства на $F(a+h)$, получимъ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}-M<0 \qquad \frac{f(a+h)}{F(a+h)}-m>0$$

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}<M \qquad \frac{f(a+h)}{F(a+h)}>m.$$

Это и требовалось доказать.

II случай. $\qquad F'(x)=-.$

Доказательство ведется такъ же. Последовательно получаемъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)}<M \qquad\qquad \frac{f(x)}{F(x)}>m$$

$$f'(x)>MF'(x) \qquad\qquad f'(x)<mF'(x)$$

$$f'(x)-MF'(x)>0 \qquad\qquad f'(x)-mF'(x)<0.$$

Лѣвой производной соотвѣтствуетъ возрастающая функція, правой—убывающая; поэтому, такъ какъ:

$$f(a)-MF(a)=0 \qquad\qquad f(a)-mF(a)=0,$$

то

$$f(a+h)-MF(a+h)>0 \qquad\qquad f(a+h)-mF(a+h)<0.$$

При $F(x)<0$, функція $F(x)$ убывающая, и такъ какъ $F(a)=0$, то $F(a+h)<0$ и при дѣленіи на $F(a+h)$ получится:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}-M<0 \qquad\qquad \frac{f(a+h)}{F(a+h)}-m>0$$

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}<M \qquad\qquad \frac{f(a+h)}{F(a+h)}>m.$$

Такъ какъ прибавлялась къ a величина, заключающаяся между нулемъ и h, то можно ее обозначить, какъ нѣкоторую часть h, именно Qh, гдѣ Q—правильная дробь.

Доказанная теорема выразится тогда въ видѣ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+Qh)}{F'(a+Qh)} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Q=(Q_1-1).$$

§ 28. *Обобщеніе теоремы Коши.*

Если условіе теоремы Коши представить въ видѣ:

$$1)\ \text{при } x=a \left\{\begin{array}{ll} f(x)=0 & F(x)=0 \\ f'(x)=0 & F'(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f^{(n-1)}(x)=0 & F^{(n-1)}(x)=0 \end{array}\right.$$

$$2)\ \left.\begin{array}{ll} f(x) & F(x) \\ f'(x) & F'(x) \\ f''(x) & F''(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) & F^{(n)}(x) \end{array}\right\}\ \text{конечны и непрерывны для } x=(a,a+h)$$

3) $F'(x)$, $F''(x)\ldots F^{(n)}(x)$ не мѣняютъ знака для $x=(a,a+h)$, то и заключеніе ея, которое представится въ видѣ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+Q_1h)}{F'(a+Q_1h)}=\frac{f''(a+Q_2h)}{F''(a+Q_2h)}\ldots\frac{f^{(n)}(a+Q_nh)}{F^{(n)}(a+Q_nh)} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$0\leqq Q_n\leqq Q_{n-1}\leqq Q_{n-2}\ldots\ldots\leqq Q_2\leqq Q_1\leqq 1.$$

будетъ справедливо. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая первыя производныя, какъ самостоятельныя функціи, получимъ распространенія теоремы на вторыя производныя и т. д.

§ 29. *Частные случаи.* 1) Возьмемъ функцію:

$$F(x)=x.$$

Эта функція обращается въ нуль при $x=0$. Положимъ, что при томъ же значеніи перемѣннаго:

$$f(x)=f(o)=0,$$

т. е. первое условіе теоремы Коши, удовлетворяется. Допустимъ, что функція $f(x)$—конечна и непрерывна для $x=(0,h)$, и что тому же требованію удовлетворяетъ ея производная; (производная $F(x)$ есть единица). Этимъ удовлетворяются второе и третье требованія теоремы. Примѣнивъ ее, получимъ:

$$\frac{f(h)}{h}=\frac{f'(Qh)}{1}$$

$$f(h)=hf'(Qh)\ldots\ldots\ldots(3)$$

Примѣръ. Функція $f(x)=\mathrm{Sin}x$ удовлетворяетъ требованіямъ теоремы Коши въ предѣлахъ $h=(0,\pi)$. Поэтому, примѣнивъ формулу (3), можемъ написать:

$$\mathrm{Sin}h=h\mathrm{Cos}(Qh).$$

2) Разсмотримъ формулу (2) для случая.

$$F(x)=x^n.$$

Функція $F(x)$ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ теоремы Коши. Положимъ, что и функція $f(x)$ имъ удовлетворяетъ.

Тогда:
$$\frac{f(h)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(Qh)}{F^{(n)}x}.$$

но
$$F^{(n)}(x)=1.2.3\ldots.n,$$

слѣдовательно,

$$\frac{f(h)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(Qh)}{1.2..n}$$

$$f(h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots.n}f^{(n)}(Qh)\ldots\ldots(4)$$

§ 30. *Теоремы о конечномъ приращеніи:*

Теорема Ролля. Поставимъ только одно условіе, именно, чтобы функціи $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ были конечны и непрерывны для $x=(a,a+h)$, и возьмемъ такую функцію f, чтобы.

$$f(h)=\psi(a+h)-\psi(a);$$

тогда $$f'(h)=\psi'(\alpha+h).$$

При $h=0$, имѣемъ:

$$f(0)=\psi(\alpha)-\psi(\alpha)=0$$
$$f'(0)=\psi'(\alpha);$$

т. е. функція $f(h)$ удовлетворяетъ условіямъ теоремы Коши до первой производной. По формулѣ (3) получимъ:

$$\psi(\alpha+h)-\psi(\alpha)=h\psi'(\alpha+\theta h)$$

($f'(Qh)$ получается изъ $f'(h)$ замѣной h черезъ θh) или

$$\psi(\alpha+h)=\psi(\alpha)+h\psi'(\alpha+\theta h)\,\ldots\ldots(5)$$

Это равенство выражаетъ *теорему Ролля о конечномъ приращеніи.*

Примѣръ. Положимъ, что имѣется функція.

$$\psi(\alpha)=\mathrm{Sin}\alpha.$$

Для нея по доказанной теоремѣ.

$$\mathrm{Sin}(\alpha+h)=\mathrm{Sin}\alpha+h\mathrm{Cos}(\alpha+\theta h).$$

§ 31. Теорема Тейлора.

Выразимъ производную, входящую въ формулу (5), какъ самостоятельную функцію, при помощи этой же формулы.

$$\psi'(\alpha+\theta h)=\psi'(\alpha)+\theta h\psi''(\alpha+\theta_1 h)=\psi'(\alpha)+hp.$$

Тогда формула (5) приметъ видъ:

$$\psi(a+h)=\psi(\alpha)+h[\psi'(\alpha)+hp].$$

Отсюда:

$$\psi(a+h)-\psi(\alpha)-h\psi'(a)=h^2p.$$

Обозначимъ эту функцію черезъ $f_1(h)$ и посмотримъ, удовлетворяетъ ли она требованіямъ формулы (4):

$$f_1(h)=\psi(\alpha+h)-\psi(\alpha)-h\psi'(\alpha) \qquad f_1(0)=\psi(\alpha)-\psi(\alpha)=0$$
$$f_1'(h)=\psi'(\alpha+h)-\psi'(\alpha) \qquad f_1'(0)=\psi'(\alpha)-\psi'(\alpha)=0$$
$$f_1''(h)=\psi''(\alpha+h) \qquad f_1''(0)=\psi''(\alpha).$$

Разсматриваемая функція удовлетворяетъ указаннымъ требованіямъ до второй производной. Применяя формулу (4), получаемъ:

$$f_1(h)=\frac{h^2}{1.2}\cdot f_1''(\theta h).$$

Вставляя вмѣсто $f_1(h)$ и $f_1''(h)$ ихъ значеніе, имѣемъ

$$\psi(a+h)-\psi(\alpha)-h\psi'(\alpha)=\frac{h^2}{1.2}\psi''(\alpha+\theta h)$$

$$\psi(a+h)=\psi(\alpha)+h\psi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\psi''(\alpha+\theta h)\,\ldots\ldots\ldots(6)$$

[если $\psi(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$, $\psi''(\alpha)$ конечны и непрерывны для $\alpha=(\alpha,\alpha+h)$].

Подобнымъ же образомъ въ формулѣ (6) можно замѣнить

$$\psi''(\alpha+\theta h)$$

черезъ

$$\psi''(\alpha)+h\theta,$$

гдѣ θ—другое. Тогда изъ формулы (6) получимъ:

$$\psi(\alpha+h)=\psi(\alpha)-h\psi'(\alpha)-\frac{h^2}{1.2}\psi''(\alpha)-\frac{h^3}{1.2}\theta=f_2(h).$$

По формулѣ (6):

$$f_2(h)=\frac{h^3}{1.2.3}f_2'''(\theta h)$$

и по подстановкѣ:

$$\psi(\alpha+h)=\psi(\alpha)+h\psi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\psi''(\alpha)+\frac{h^3}{1.2.3}\psi'''(\alpha+\theta h).$$

Продолжая дѣйствовать такимъ же образомъ, получимъ равенство:

$$\psi(\alpha+h)=\psi(\alpha)+h\psi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\psi''(\alpha)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(\alpha+\theta h) \quad \ldots(7)$$

лѣвая часть котораго представляетъ конечный рядъ или равенство:

$$\psi(\alpha+h)=\psi(\alpha)+h\psi'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}\psi''(\alpha)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(\alpha)+\ldots\ldots(9)$$

съ правой частью, имѣющей видъ безконечнаго ряда.

Полученное разложеніе функціи $\psi(\alpha+h)$ носитъ названіе *ряда или строки Тейлора* (Brook. Taylor; открыто въ 1715 г.)

Послѣдній членъ формулы (7):

$$\theta=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\psi^n(\alpha+\theta h)\ldots\ldots(8)$$

носящій названіе *дополнительнаго члена строки Тейлора*, выведенъ въ такой формѣ Лагранжемъ (Lagrange, 1797 г.) и называется иногда *остаткомъ Лагранжа*.

Условіемъ теоремы Тейлора остается требованіе, чтобы, какъ сама функція, такъ и всѣ разсматриваемыя производныя оставались конечны и непрерывны для $x=(\alpha,\alpha+h)$.

§ 32. Теорема Маклорена (иначе: Стирлинга Stearling) получается, если въ теоремѣ Тейлора положить:

$$\alpha=0$$
$$h=x.$$

Она выражается, слѣдовательно, такими рядами:

$$\psi(x)=\psi(0)+x\psi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\psi''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(\theta x)\ \ldots\ldots(10)$$

$$Q=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\psi^{(n)}(\theta x)\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ldots(10')$$

$$\psi(x)=\psi(0)+x\psi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\psi''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n}\psi^{(n)}(0)+\ \ldots\ldots(11)$$

Условія остаются тѣ же самыя.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Дифференцированіе функціи со многими перемѣнными.

Для простоты будемъ разсматривать въ настоящей главѣ функціи трехъ перемѣнныхъ; но всѣ разсужденія справедливы и для произвольнаго числа перемѣнныхъ.

§ 33. *Частныя производныя и частныя дифференціалы.* Положимъ, что: $u=f(x,y,z)$.

Если перемѣнному x дадимъ приращеніе Δx, получимъ:

$$u+\Delta_x u=f(x+\Delta x,y,z).$$

Вычитаемъ изъ этого равенства предыдущее и дѣлимъ обѣ части на Δx:

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

Перейдя къ предѣлу, найдемъ производную функціи u по x.

$$\frac{du}{dx}=\lim\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}=f'_x(x,y,z).$$

Сходнымъ образомъ найдемъ производныя по y и z:

$$\frac{du}{dy}=\lim\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}=f'_y(x,y,z)$$

$$\frac{du}{dz}=\lim\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}=f'_z(x,y,z).$$

Эти три производныя называются *частными производными*. Помноживъ обѣ части на знаменателей лѣвой части, получимъ *частные дифференціалы* по x, y, z. Дифференціалы эти, хотя и обозначенные въ предыдущихъ формулахъ одинаково — черезъ du, всѣ различны. Они суть:

$$d_x u = \frac{du}{dx}dx = f'_x(x, y, z)dx$$

$$d_y u = \frac{du}{dy}dy = f'_y(x, y, z)dy$$

$$d_z u = \frac{du}{dz}dz = f'_z(x, y, z)dz.$$

Частныя производныя обозначаются слѣд. образомъ:

Обозначеніе Коши (Cauchy):

$$\frac{d_x u}{dx} \qquad \frac{d_y u}{dy} \qquad \frac{d_z u}{dz}.$$

Обозначеніе Эйлера (Euler)

$$\left(\frac{du}{dx}\right) \qquad \left(\frac{du}{dy}\right) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)$$

Обозначеніе Якоби (Jacobi):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Послѣднее значеніе самое употребительное.

§ 34. Полный дифференціалъ.

Найдемъ приращеніе функціи при единовременномъ приращеніи всѣхъ перемѣнныхъ. Оно будетъ:

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z).$$

Чтобы вычислить функцію приращенныхъ перемѣнныхъ будемъ давать перемѣннымъ приращеніе постепенно; примѣняя при этомъ теорему Тейлора, получимъ:

$$f(x+\Delta x,\ y,\ z) = f(x,\ y,\ z) + \Delta x f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y,\ z)$$

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z) = f(x+\Delta x,\ y,\ z) + \Delta y f'_y(x+\Delta x,\ y+\theta_2\Delta y,\ z)$$

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z) +$$
$$+ \Delta z f'_z(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\theta_3\Delta z).$$

Складывая эти равенства почленно и перенося въ лѣвую часть $f(x, y, z)$, по приведеніи получимъ тамъ Δu.

Итакъ:

$$\Delta u = \Delta x f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y,\ z) + \Delta y f'_y(x+\Delta x,\ y+\theta_2\Delta y,\ z) +$$
$$+ \Delta z f'_z(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\theta_3\Delta z).$$

Будемъ считать наши перемѣнныя нѣкоторыми функціями произвольнаго t съ единственнымъ условіемъ, чтобы, если:

$$\Delta t = 0,$$

$$\Delta x = 0,\ \Delta y = 0,\ \Delta z = 0,$$

Раздѣливъ обѣ части выраженія Δu на Δt и перейдя къ предѣлу, получимъ производную u по t. Въ предѣлѣ приращенія x, y, z, не входящія въ отношенія къ Δt, т. е. заключающіяся въ функціяхъ, сводятся къ нулю. Производная по t приметъ видъ:

$$\frac{du}{dt}=\left(\lim\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)f'_x(x, y, z)+\left(\lim\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)f'_y(x, y, z)+\left(\lim\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)f'_z(x, y, z),$$

или:
$$\frac{du}{dt}=\frac{dx}{dt}f'_x(x, y, z)+\frac{dy}{dt}f'_y(x, y, z)+\frac{dz}{dt}f'_z(x, y, z).$$

Откуда (полный дифференціалъ).

$$\left.\begin{aligned}
&du=dxf'_x(x, y, z)+dyf'_y(x, y, z)+dzf'_z(x, y, z)\\
&du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\
&du=d_xu+d_yu+d_zu\\
&du=(d_x+d_y+d_z)u \qquad \Big[\text{символически}
\end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Выраженіе это есть полный дифференціалъ.

Итакъ, полный дифференціалъ равенъ суммѣ частныхъ дифференціаловъ.

Что касается полной производной, то ея не существуетъ.

§ 35. Частныя производныя высшихъ порядковъ.

Всякая производная отъ функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ имѣетъ въ свою очередь столько производныхъ, сколько содержитъ перемѣнныхъ. Эти производныя,—*вторыя частныя производныя*,—имѣютъ по столько же *третьихъ производныхъ*, и т. д. Слѣдующая таблица вторыхъ частныхъ производныхъ функціи трехъ перемѣнныхъ показываетъ употребляемыя обозначенія:

$$\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}=\frac{\partial f'_x(x, y, z)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y}=\frac{\partial f'_x(x, y, z)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y}=f''_{xy}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial z}=\frac{\partial f'_x(x, y, z)}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial z}=f''_{xz}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x}=\frac{\partial f'_y(x, y, z)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y.\partial x}=f''_{yx}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial f'_y(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial z} = \frac{\partial f'_y(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial z} = f''_{yz}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial x} = \frac{\partial f'_z(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z . \partial x} = f''_{zx}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial y} = \frac{\partial f'_z(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z . \partial y} = f''_{zy}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z} = \frac{\partial f'_z(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''_{z^2}(x, y, z).$$

Не трудно видѣть, что частныхъ производныхъ n-го порядка получимъ 3^n. Но различныхъ производныхъ получается меньше вслѣдствіе слѣдующей теоремы.

Теорема. *Результатъ, происшедшій отъ частнаго дифференцированія не зависитъ отъ порядка дифференцированія.*

Дк.: Пусть $u = f(x, y, z)$

по § 33 $$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Возьмемъ отъ этой производной производную по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y} = \lim \frac{\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x, y+\Delta y, z)}{\Delta x} - \dfrac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}}{\Delta y} =$$

$$= \lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) + f(x, y, z)}{\Delta x . \Delta y}.$$

Вслѣдствіе симметричности правой части относительно x и y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y}.$$

Въ общемъ случаѣ теорема представляется въ видѣ:

$$\frac{\partial^{l+m+n} u}{\partial x^l . \partial y^m \partial z^n} = \frac{\partial^{l+m+n} u}{\partial y^m \partial x^l \partial z^n} = \frac{\partial^{l+m+n} u}{\partial z^n \partial x^l \partial y^m} = \ldots\ldots . (13).$$

§ 36. Полные дифференціалы высшихъ порядковъ.

Найдемъ второй полный дифференціалъ, т. е. полный дифференціалъ перваго полнаго дифференціала:

$$d^2u=d(du)=d(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)$$
$$=\partial_x(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)+\partial_y(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)+\partial_z(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)=$$
$$=\partial_x\partial_x u+\partial_x\partial_y u+\partial_x\partial_z u+\partial_y\partial_x u+\partial_y\partial_y u+\partial_y\partial_z u+\partial_z\partial_x u+\partial_z\partial_y u+\partial_z\partial_z u=$$
$$=\partial_x\partial_x u+\partial_y\partial_y u+\partial_z\partial_z u+2\partial_x\partial_y u+2\partial_x\partial_z u+2\partial_y\partial_z u$$
$$=\partial^2{}_x u+\partial^2{}_y u+\partial^2{}_z u+2\partial_x\partial_y u+2\partial_x\partial_z u+2\partial_y\partial_z u.$$

Въ раскрытомъ видѣ:

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x.\partial y}dxdy+$$
$$+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}dy.dz\ldots\ldots(14)$$

Символически можно написать:

$$\partial^2u=(\partial_x+\partial_y+\partial_z)^2u.$$

Это символическое изображеніе можно получить уже изъ второй строки нашего вывода d^2u:

$$d^2u=\partial_x(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)+\partial_y(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)+\partial_z(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)=$$
$$=(\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u)(\partial_x+\partial_y+\partial_z)=(\partial_x+\partial_y+\partial_z)(\partial_x+\partial_y+\partial_z)u=$$
$$=(\partial_x+\partial_y+\partial_z)^2u.$$

Общая символическая формула для полнаго дифференціала n-го порядка имѣетъ видъ:

$$d^nu=(\partial_x+\partial_y+\partial_z)^nu\ldots\ldots\ldots(14a)$$

Въ случаѣ *двухъ перемѣнныхъ* получаются биноміальные коэффиціенты; дѣйствительно, пусть:

$$u=f(x,y),$$

тогда

$$d^nu=(\partial_x+\partial_y)^nu=\partial_x{}^nu+n\partial_x{}^{n-1}\partial_y u+\frac{n(n-1)}{1.2}\partial_x{}^{n-2}\partial_y{}^2u+\ldots+\partial_y{}^nu=$$
$$=\frac{\partial^nu}{\partial x^n}dx^n+n\frac{\partial^nu}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\partial^nu}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\partial^nu}{\partial y^n}dy^n\ldots\ldots(15)$$

§ 37. Полные дифференціалы функцій зависимыхъ перемѣнныхъ. Возьмемъ функцію:

$$T=f(u,v,w),\ \text{гдѣ}$$
$$U,V,W=\varphi(x,y,z).$$

Первый полный дифференціалъ будетъ:

$$dT=\frac{\partial T}{\partial u}du+\frac{\partial T}{\partial v}dv+\frac{\partial T}{\partial w}dw$$

гдѣ

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz.$$

Составимъ второй полный дифференціалъ данной функціи:

$$d^2T=d\left[\frac{\partial T}{\partial u}du\right]+d\left[\frac{\partial T}{\partial v}dv\right]+d\left[\frac{\partial T}{\partial w}dw\right]=$$

$$=d\frac{\partial T}{\partial u}du+\frac{\partial T}{\partial u}d^2u+d\frac{\partial T}{\partial v}dv+\frac{\partial T}{\partial v}d^2v+d\frac{\partial T}{\partial w}dw+\frac{\partial T}{\partial w}d^2w=$$

$$=\left[\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}du+\frac{\partial^2 T}{\partial u.\partial v}dv+\frac{\partial^2 T}{\partial u\partial w}dw\right]du+\frac{\partial T}{\partial u}d^2u+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 T}{\partial v\partial u}du+\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}dv+\frac{\partial^2 T}{\partial v.\partial w}dw\right]dv+\frac{\partial T}{\partial v}d^2v+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 T}{\partial w\partial u}du+\frac{\partial^2 T}{\partial w\partial v}dv+\frac{\partial^2 T}{\partial w^2}dw\right]dw+\frac{\partial T}{\partial w}d^2w$$

$$=\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}du^2+\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial^2 T}{\partial w^2}dw^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 T}{\partial u.\partial v}du.dv+2\frac{\partial^2 T}{\partial u.\partial w}du.dw+2\frac{\partial^2 T}{\partial v\partial w}dv.dw+$$

$$+\frac{\partial T}{\partial u}d^2u+\frac{\partial T}{\partial v}d^2v+\frac{\partial T}{\partial w}d^2w.$$

Такимъ образомъ, полный дифференціалъ второго порядка функціи зависимыхъ перемѣнныхъ отличается отъ дифференціала функціи независимыхъ перемѣнныхъ тремя лишними членами. Для дифференціаловъ слѣдующихъ порядковъ получаются все болѣе и болѣе сложныя выраженія.

§ 38. Теорема Тейлора для функцій со многими перемѣнными.

Разсмотримъ сначала функцію двухъ перемѣнныхъ.

$$u=f(x, y).$$

Для $f(x)$ мы имѣемъ:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

Если мы не дадимъ y никакого приращенія, то его можно разсматривать, какъ постоянное, и потому примѣнить въ этомъ случаѣ ту же формулу къ функціи u

$$f(x+h, y)=f(x, y)+hf_x'(x, y)+\frac{h^2}{1.2}f_{x^2}''(x, y)+\ldots\ldots$$

Если мы теперь предположимъ, что начальная функція была не $f(x, y)$, а $f(x, y+k)$, т. е. что мы ранѣе дали y нѣкоторое приращеніе k, то предыдущее разложеніе приметъ слѣдующій видъ:

$$f(x+h, y+k)=f(x, y+k)+hf_x'(x, y+k)+\frac{h^2}{1.2}f''_{x^2}(x, y+k)+\ldots\ldots$$

Каждый изъ членовъ этого разложенія можно разложить по степенямъ приращенія:

$$f(x, y+k)=f(x, y)+kf'_y(x, y)+\frac{k^2}{1.2}f''_{y^2}(x, y)+\frac{k^3}{1.2.3}f'''_{y^3}(x, y)+\ldots$$

$$hf'_x(x, y+k)= \quad hf_x'(x, y)+hkf'_{xy}(x, y)+\frac{hk^2}{1.2}f''_{xy^2}(x, y)+\ldots$$

$$h^2f''_{x^2}(x, y+k)= \quad h^2f''_{x^2}(x, y)+h^2kf'''_{x^2y}(x, y)+\ldots\ldots$$

$$h^3f''_{x^3}(x, y+k)= \quad h^3f'''_{x^3}(x, y)+\ldots\ldots$$

Поставивъ эти члены въ общую формулу, получимъ по соединеніи производныхъ одинаковыхъ степеней

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+[hf_x'(x, y)+kf_y'(x, y)]+$$
$$+\frac{1}{1.2}[h^2f''_{x^2}(x, y)+2hkf''_{xy}(x, y)+k^2f''_{y^2}(x, y)]+$$
$$+\frac{1}{1.2.3}[h^3f''_{x^3}(x,y)+3h^2kf_{x^2y}(x, y)+3hk^2f'''_{xy^2}(x, y)+k^3f''_{y^3}(x, y)]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

Это равенство выражаетъ теорему Тейлора для функціи двухъ перемѣнныхъ. Оно приметъ нѣсколько иной, болѣе простой видъ, если вести нѣкоторыя символическія выраженія. Будемъ обозначать $hf'_x(x,y)$ черезъ $\delta_x f$, или вообще, примемъ

$$h^mk^nf^{m+n}_{x^my^n}=\delta^m_x\delta_y^n f.$$

Тогда для теоремы Тейлора получимъ послѣдовательно слѣдующія выраженія:

$$f(x+h, y+k)=f+(\delta_x f+\delta_y f)+\frac{1}{1.2}(\delta^2_x f+2\delta_x\delta_y f+\delta_y^2 f)+$$
$$+\frac{1}{1.2.3}(\delta^3_x f+3\delta^2_x\delta_y f+3\delta_x\delta^2_y f+\delta^3_y f)=$$

$$=\left[1+(\delta_x+\delta_y)+\frac{\delta^2_x+2\delta_x\delta_y+\delta_y^2}{1.2}+\frac{\delta_x^3+3\delta_x^2\delta_y+3\delta_x\delta_y^2+\delta^3}{1.2.3}+\ldots\right]f=$$

$$\left[1+\delta_x+\delta_y+\frac{(\delta_x+\delta_y)^2}{1.2}+\frac{(\delta_x+\delta_y)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]f.$$

Дальше будетъ доказано, что выраженіе, стоящее въ скобкахъ, равно $e^{\delta x+\delta y}$.

Итакъ, окончательно:

$$f(x+h,\ y+k)=e^{\delta x+\delta y}f\ldots\ldots\ldots(16')$$

Въ случаѣ трехъ перемѣнныхъ, пользуясь изложеннымъ уже пріемомъ, получимъ:

$$f(x+h,y+k,z+l)=f+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+l^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}+2hl\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial z}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial z}\right]+\ .(17)$$

Введя обозначеніе:

$$h^m k^n l^p\frac{\partial^{m+n+p} f}{\partial x^m\partial y^n\partial z^p}\quad \delta_x^m.\delta_y^n.\delta_z^p.f,$$

напишемъ символически:

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f\left[1+(\delta_x+\delta_y+\delta_z)+\frac{1}{1.2}(\delta_x+\delta_y+\delta_z)^2+\ldots\right]=$$

$$=e^{\delta_x+\delta_y+\delta_z}f\ldots\ldots(17')$$

Формула эта можетъ быть распространена на произвольное число перемѣнныхъ.

§ 39. Теорема однородныхъ функцій (Фонтена или Эйлера).

Положимъ, что имѣемъ однородную функцію n-ой степени $f(x, y, z)$. Если умножить каждое перемѣнное на t, то, на основаніи однородности, вся функція умножится на t^n.

$$f(tx,\ ty,\ tz)=t^n f(x,\ y,\ z).$$

Возьмемъ производныя обѣихъ частей по t:

$$f_t'(tx,\ ty,\ tz)=nt^{n-1}f(x,\ y,\ z).$$

Лѣвую часть можно представить въ видѣ:

$$f'_x(tx,\ ty,\ tz)x+f'_y(tx,\ ty,\ tz)y+f'_z(tx,\ ty,\ tz)z\ ^{1)},$$

---

1) Положимъ, что одинъ изъ членовъ функціи $f(x, y, z)$ есть $Ax^l y^m z^p$, гдѣ $l+m+p=n$.

Соотвѣтствующій членъ функціи $f(tx,\ ty,\ tz)$ есть:

$$Ax^l y^m z^p t^{l+m+p}$$

производная этого члена по t будетъ $(l+m+p)Ax^l y^m z^p t^{l+m+p-1}$.

такимъ образомъ получимъ:

$$f'_{tx}(tx, ty, tz)x+f'_{ty}(tx, ty, tz)y+f'_{tz}(tx, ty, tz)z = nt^{n-1}f(x, y, z);$$

положивъ t равнымъ единицѣ, будемъ имѣть:

$$nf(x, y, z)=xf'_x(x, y, z)+yf'_y(x, y, z)+zf'_z(x, y, z),$$

или: $$nf=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

т. е. *однородная функція, умноженная на показателя однородности равна суммѣ частныхъ производныхъ, умноженныхъ на соотвѣтственныя перемѣнныя.*

Если взять вторую производную по t, получимъ:

$$n(n-1)f=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+$$
$$+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}+2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial z}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial z}.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Дифференцированіе неявныхъ функцій.

§ 40. Дифференціалы и производныя функціи одного независимаго перемѣннаго.

Неявная функція одного независимаго перемѣннаго, напримѣръ, y, или двухъ зависимыхъ одно отъ другого, имѣемъ видъ:

$$f(x, y)=0.$$

Представивъ тотъ же общій членъ въ видѣ $Ay^m z^p t^{m+p}(tx)^l$, получимъ производную его по tx: $lAy^m z^p t^{m+p}(tx)^{l-1}$, или

$$lAx^{l-1}y^m z^p t^{m+p+l-1}.$$

Найденныя подобнымъ же образомъ производныя по ty и tz будутъ: $$mAx^l y^{m-1} z^p t^{l+m+p-1}$$
и $$pAx^l y^m z^{p-1} t^{l+m+p-1}.$$

Умноживъ эти производныя соотвѣтственно на x, y, z получимъ:

$$lAx^l y^m z^p t^{l+m+p-1}$$
$$mAx^l y^m z^p t^{l+m+p-1}$$
$$pAx^l y^m z^p t^{l+m+p-1}.$$

Сумма этихъ произведеній даетъ производную по t:

$$(l+m+p)Ax^l y^m z^p t^{l+m+p-1}.$$

Такъ какъ дифференцированіе совершается надъ каждымъ членомъ отдѣльно, то выведенное для одного члена справедливо для всей функціи.

Чтобы найти производную $\frac{dy}{dx}$, можно выразить y явной функцiей x, рѣшивъ уравненiе, и затѣмъ продифференцировать. Но уравненiе не всегда можно рѣшить; необходимо, поэтому, найти другой способъ для полученiя производныхъ.

Положимъ, что x и y получили приращенiя Δx и Δy, съ которыми они удовлетворяютъ уравненiю, такъ что:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)=0.$$

Разложимъ лѣвую часть по теоремѣ Тейлора:

$$f(x,y)+\left(\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2}\left(\Delta x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}+\Delta y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\ldots\ldots\ldots=0.$$

По условiю: $\qquad f(x,y)=0$

слѣдовательно, первый членъ разложенiя пропадетъ.

Положивъ, что x и y суть нѣкоторыя функцiи произвольнаго t, раздѣлимъ уравненiе на Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\partial f}{\partial y}+$$

$$+\frac{1}{1.2}\left(\Delta x\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\Delta y\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}+\Delta y\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\ldots=0.$$

Перейдя къ предѣлу получимъ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2}\left(\Delta x\frac{dx}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\Delta y\frac{dx}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}+\Delta y\frac{dy}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\ldots\ldots=0.$$

Второй членъ и всѣ слѣдующiе, въ предѣлѣ обращается въ нуль и остается:

$$\frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

и, по умноженiи на dt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0.$$

Такимъ образомъ *для дифференцированiя неявной функцiи достаточно приравнять нулю дифференцiалъ лѣвой части.*

Изъ полученнаго дифференціала уравненія не трудно получить производную y по x и дифференціалъ y:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},\qquad dy=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx.$$

Дифференціалы второго порядка. Пользуясь выведеннымъ правиломъ получаемъ дифференціалъ уравненія, какъ дифференціалъ явной функціи. Обращаемъ вниманіе только на то, что, такъ какъ y не есть независимое перемѣнное, то во второмъ дифференціалѣ появится лишній членъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}d^2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}dx.dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0.$$

Чтобы найти вторую производную y по x дѣлимъ уравненіе на dx^2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Отсюда опредѣляемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y}\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=$$

$$=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=$$

$$=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

§ 41. Полные дифференціалы функцій многихъ перемѣнныхъ.

Первый дифференціалъ неявной функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ получается такъ же, какъ и дифференціалъ функціи одного перемѣннаго.

Такъ функція: $f(x, y, z)=0$
по дифференцированіи дастъ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$

откуда можемъ получить:

$$dz=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy}{\frac{\partial f}{\partial z}}=-\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dx+\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dy\right].$$

При полученіи высшихъ дифференціаловъ необходимо помнить. что одно изъ входящихъ въ уравненіе перемѣнныхъ, напримѣръ, z, не независимо. Второй дифференціалъ будетъ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}dx.dy+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial z}dx.dz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial z}\partial y.dz+\frac{\partial f}{\partial z}d^2z=0;$$

При составленіи третьяго дифференціала, изъ перваго члена второго дифференціала получится:

$$d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\partial x^2\right)=d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dx^2=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx+\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dy+\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}dz\right)dx^2.$$

Изъ третьяго же члена получимъ:

$$d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2\right)=d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dz^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}d(dz^2)=$$

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}dx+\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y}dy+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}dz\right)dz^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}2dzd^2z.$$

Подобнымъ же образомъ дифференцируемъ и остальные члены.

Если дано n совмѣстныхъ функцій:

$$f_1(x, y, z, t, \ldots\ldots u)=0$$
$$f_2(x, y, z, t, \ldots\ldots v)=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x, y, z, t, \ldots\ldots w)=0,$$

то въ каждой функціи одно перемѣнное будетъ зависимымъ, такъ что всего зависимыхъ перемѣнныхъ будетъ n. Поэтому. прежде. чѣмъ получать дифференціалы высшихъ порядковъ, надо условиться, какія n перемѣнныхъ считаютъ зависимыми.

§ 42 *Частныя производныя и частные дифференціалы*. Положимъ, что имѣемъ функцію:

$$z=f(x, y).$$

Производныя:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

называются частными производными перваго порядка. Производныя.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

называются частными производными второго порядка, и т. д. Для частныхъ производныхъ двухъ первыхъ порядковъ приняты обозначенія:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = S, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

§ 43. *Дифференціальныя уравненія перваго порядка.* Возьмемъ уравеніе, въ которое кромѣ перемѣнныхъ входитъ нѣкоторое постоянное c:

$$f(x, y, c) = 0.$$

Дифференціалъ этого уровня есть:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Изъ послѣдняго уравненія и изъ даннаго можно исключить постоянное c. Результатъ исключенія называется *результантомъ* и выразится въ видѣ равенства нулю нѣкоторой функціи отъ перемѣннаго и ихъ производной:

$$R_c = \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Полученное уравненіе называется *дифференціальнымъ уравненіемъ перваго порядка.*

Итакъ, *дифференціальное уравненіе перваго порядка получается при исключеніи постояннаго изъ уравненія и его перваго дифференціала.*

Дифференціальное уравненіе перваго порядка есть конечное соотношеніе между перемѣнными и ихъ первой производной.

Уравненіе: $f(x, y, c)=0$.
изъ котораго получилось дифференціальное уравненіе носитъ названіе его *общаго интеграла*.

Итакъ, *общій интегралъ дифференціальнаго уравненія есть конечное соотношеніе между перемѣнными и произвольнымъ постояннымъ* c. Если постоянное пріобрѣтаетъ опредѣленное значеніе, интегралъ становится частнымъ. Нахожденіе интеграла дифференціальнаго уравненія — *интегрированіе дифференціальныхъ уравненій* составляетъ предметъ второй части *интегральнаго исчисленія* (первая часть котораго—квадратура -занимается интегрированіемъ явныхъ функцій.

Геометрически, дифференціальное уравненіе есть соотношеніе между координатами и тангенсомъ угла наклоненія кривой. Интегралъ его— соотношеніе между координатами и произвольнымъ параметромъ.

§ 44 *Дифференціальныя уравненія высшихъ порядковъ.*

Возьмемъ уравненіе $f(x, y, c_1, c_2)=0$,
возьмемъ также его первый и второй дифференціалы:

$$1)\quad \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

$$2)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0$$

и представимъ ихъ въ видѣ

$$1')\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$2')\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Изъ этихъ двухъ дифференціаловъ и изъ даннаго уравненія можно исключить c_1 и c_2. Получимъ результантъ:

$$R_{c_1c_2}=\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

или
$$\psi(x, y, y', y'')=0;$$

онъ представляетъ собою *дифференціальное уравненіе втораго порядка*. Мы видимъ, что уравненіе это получается при исключеніи двухъ параметровъ и содержитъ въ себѣ перемѣнныя и двѣ производныя. Уравненіе

$$f(x, y, c_1, c_2)=0$$

есть опять *общій интегралъ*.

Уравненіе окружности:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

заключаетъ *два параметра*—a и b, координаты центра.

При измѣненіи ихъ окружность только мѣняетъ мѣсто, оставаясь все время себѣ равною. Дифференціальное же уравненіе, соотвѣтствующее этому интегралу:

$$\psi(x, y, y', y'')=0,$$

изображаетъ безчисленное множество другихъ кривыхъ.

Изъ интеграла и перваго дифференціала мы можемъ исключить каждый параметръ въ отдѣльности.

Получатся выраженія:

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c_1\right)=0$$

$$\varphi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c_2\right)=0.$$

Выраженія эти называются *промежуточными интегралами* или *первыми интегралами*. Изъ каждаго изъ нихъ первымъ интегрированіемъ $\left(\text{исключеніемъ } \frac{dy}{dx}\right)$ получается начальный интегралъ, и первымъ дифференцированіемъ (исключеніемъ c_1 и c_2) дифференціальное уравненіе второго порядка.

Подобнымъ же образомъ *интегралъ n-го порядка* представляется въ видѣ:

$$f(x, y, c_1 c_2 \ldots . c_n)=0;$$

дифференціальное уравненіе n-го порядка:

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots . \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Первые промежуточные интегралы (ихъ n):

$$\varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots . \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_1\right)=0,$$

$$\varphi_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots . \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_2\right)=0,$$

. . . .

$$\varphi_n\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots . \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_n\right)=0.$$

§ 45. *Исключеніе произвольной функціи.*

Если мы имѣемъ нѣкоторую опредѣленную функцію:

$$F(x, y),$$

то функція:

$$z=\varphi\left[F(x, y)\right]$$

называется *произвольной функціей.*

Возьмемъ первыя частныя производныя этой функціи (при этомъ примѣняется въ распространенномъ видѣ теорема Лагранжа § 19):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\left[F(x, y)\right]\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\left[F(x, y)\right]\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Раздѣливъ эти производныя одна на другую, получимъ:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cdot p=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot q.$$

Полученное равенство, не содержащее уже неопредѣленной функціи, называется *дифференціальнымъ уравненіемъ съ частными производными* (*Equation différentielle aux dérivées partielles*).

Возьмемъ функцію:

$$M=\varphi(N),$$

гдѣ M и N—функціи x, y, z. Предположимъ, что зависимое перемѣнное есть z. Тогда частныя производныя обѣихъ частей по x и y будутъ

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}{}^{1)}=\varphi' N\left[\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi' N\left[\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

---

[1]) Полный дифференціалъ функціи $M(x, y, z)$ есть:

$$\frac{\partial M}{\partial x}dx+\frac{\partial M}{\partial y}dy+\frac{\partial M}{\partial z}dz.$$

Раздѣливъ эти равенства одно на другое и введя обозначенія p и q (§ 42), получимъ:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}+\dfrac{\partial M}{\partial z}\cdot p}{\dfrac{\partial M}{\partial y}+\dfrac{\partial M}{\partial z}\cdot q}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}+\dfrac{\partial N}{\partial z}\cdot p}{\dfrac{\partial N}{\partial y}+\dfrac{\partial N}{\partial z}\cdot q}.$$

Освободившись отъ знаменателя, приведемъ равенство къ виду:

$$\frac{\partial M}{\partial x}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}\cdot p+\frac{\partial M}{\partial x}\cdot\frac{\partial N}{\partial z}q+\frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial N}{\partial z}p\cdot q=$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}p+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\frac{\partial M}{\partial z}q+\frac{\partial N}{\partial z}\cdot\frac{\partial M}{\partial z}p\cdot q$$

или

$$\left[\frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial y}\cdot\frac{\partial N}{\partial z}\right]p+\left[\frac{\partial M}{\partial x}\cdot\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial N}{\partial x}\right]q=$$
$$=\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\cdot\frac{\partial N}{\partial y}.$$

Это выраженіе есть *дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка съ двумя независимыми перемѣнными.*

Общимъ интеграломъ его служитъ уравненіе:

$$M=\varphi(N).$$

Если φ есть опредѣленная функція, то это равенство есть *частный интегралъ.*

Если имѣемъ *двѣ произвольныхъ функціи*, напримѣръ:

$$z=\varphi(x+y)+\psi(x-y),$$

то для исключенія ихъ приходится дифференцировать два раза, и получается *дифференціальное уравненіе второго порядка.*

Чтобы получить изъ него частный дифференціалъ по x, даемъ x приращеніе ∂x вмѣсто dx (дѣло, собственно, только въ обозначеніи); y не даемъ никакого приращенія, такъ что:

$$dy=0;$$

z получаетъ приращеніе, зависящее только отъ приращенія x, т. е. ∂z. Получаемъ дифференціалъ по x:

$$\frac{\partial M}{\partial x}dx+\frac{\partial M}{\partial z}\partial z.$$

Раздѣливъ его на ∂x, получимъ частную производную:

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

Примѣръ: $\quad 3xyz+x^2=\varphi(2x+z).$

Рѣшеніе: $\quad 3yz+3xyp+2x=\varphi'(2x+z)(2+p)$

$$3xz+3xyq \quad \varphi'(2x+z)q.$$

Раздѣливъ первое уравненіе на второе:

$$\frac{3yz+3xyp+2x}{3xz+3xyq}=\frac{2+p}{q}$$

$$3yzq+3xypq+2xq=6xz+6xyq+3xzp+3xypq$$

$$3xzp+(6xy-3yz \quad 2x)q+6xz=0$$

$$3xz\frac{\partial z}{\partial x}+(6xy-3yz-2x)\frac{\partial z}{\partial y}+6xz=0.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ПРИЛОЖЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ КЪ АНАЛИЗУ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Разложеніе функцій въ безконечные ряды.

§ 1. О разложеніи функцій вообще. Всякая конечная и непрерывная функція можетъ быть разложена въ безконечный рядъ по теоремѣ Тейлора или по теоремѣ Маклорена (ч. 1, §§ 31, 32). Рядомъ Маклорена, дающимъ разложеніе функціи независимо отъ приращенія перемѣннаго, пользуются по преимуществу. Задача сводится къ тому, чтобы подмѣтить законъ составленія высшихъ производныхъ функціи при $x=0$ и выставить ихъ значенія въ строку Маклорема.

§ 2. Разложеніе $(a+x)^n$. Составляемъ рядъ производныхъ и подставляемъ въ нихъ $x=0$.

$f(x)=(a+x)^n \qquad f(0)=a^n$

$f'(x)=n(a+x)^{n-1} \qquad f'(0)=na^{n-1}$

$f''(x)=n(n-1)(a+x)^{n-2} \qquad f''(0)=n(n-1)a^{n-2}$

$f'''(x)=n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3} \qquad f'''(0)=n(n-1)(n-2)a^{n-3}.$

Примѣняя формулу (11), имѣемъ:

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2+\ldots$$

т. е. получаемъ извѣстное разложеніе *бинома Ньютона* (открытаго въ 1666 году).

§ 3. *Разложеніе логариѳма.* Попробуемъ разложить:

$$f(x)=L_b(x).$$

Подставляя 0 вмѣсто x, получимъ:

$$f(0)=L(0)=-\infty$$

Обращеніе функціи въ безконечность не согласно съ условіями теоремъ Тейлора и Маклорена, и потому $L(x)$ *разложенъ быть не можетъ.*

Будемъ разлагать $L_b(a+x)$. Пишемъ производныя и подставляемъ нули вмѣсто x.

$$f(x)=L(a+x) \qquad f(0)=L(a)$$

$$f'(x)=\frac{Le}{a+x} \qquad f'(0)=\frac{Le}{a}$$

$$f''(x)=-\frac{Le}{(a+x)^2} \qquad f''(0)=-\frac{Le}{a^2}$$

$$f'''(x)=\frac{2Le}{(a+x)^3} \qquad f'''(0)=\frac{2Le}{a^3}$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{2.3.Le}{(a+x)^4} \qquad f^{IV}(0)=-\frac{2.3.Le}{a^4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)Le}{(a+x)^n} \qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)Le}{a^n}$$

Искомый рядъ есть:

$$L(a+x)=La+x\frac{Le}{a}-\frac{x^2}{1.2}\frac{Le}{a^2}+\frac{x^3}{1.2.3}\frac{2Le}{a^3}-\frac{x^4}{1.2.3.4}\frac{1.2.3Le}{a^4}+\ldots$$

или:

$$L_b(a+x)=L(a)+Le\left[\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\ldots\right]\ldots(19)$$

Всякій рядъ имѣетъ значеніе въ анализѣ только, если онъ сходящійся. Найдемъ условіе, при которомъ рядъ (19) сходится. Пользуемся для этого основнымъ признакомъ сходимости д'Аламбера: рядъ сходится, если $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. Имѣемъ.

$$u_n = Le\frac{x^n}{na^n}$$

$$u_{n+1} = Le\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}.na^n}{(n+1)a^{n+1}x^n} = \frac{x}{a}.\frac{n}{n+1}$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{x}{a}.$$

Итакъ, рядъ сходится, если

$$\frac{x}{a} < 1$$

или

$$x < a.$$

Очевидно, что онъ сходится также при $x=a$, потому что въ этомъ случаѣ представляетъ гармоническій рядъ съ частью членовъ отрицательной.

§ 4. Вычисленіе логариѳмовъ. Формулой (19) можно пользоваться для составленія таблицъ логариѳмовъ.

Мы получимъ сейчасъ ряды, выражающіе натуральные, Непперовы логариѳмы. Вычисливъ $l10$ и замѣтивъ, что

$$L_a(b).L_b(a)=1$$

$$L_{10}e.l_{10}=1$$

отсюда

$$L_{10}e=\frac{1}{l_{10}},$$

можемъ вычислить по формулѣ (19) *десятичные, Бригговы логариѳмы.*

Напишемъ (пользуясь формулой (19)), формулу разложенія Непперова логариѳма:

$$l(a+x)=l(a)+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\ldots\ldots(20)$$

Примемъ $a=1$, тогда:

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\ (22)^{1)}$$

---

1) Эта формула была впервые получена Mercator'омъ еще въ 1667 г., т. е. до открытія дифференціальнаго исчисленія.

По условію $x \lesseqgtr a$, т. е. въ данномъ случаѣ:

$$x \leqq 1.$$

Положимъ, что $x=1$, тогда по формулѣ (22):

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots(21)$$

По формулѣ (20) послѣдовательно находимъ логариѳмы чиселъ отъ 3 до 10:

$$l3=l(2+1)=l2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}-\frac{1}{4.2^4}=l2+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\ldots$$

$$l4=l(3+1)=l3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.3^3}-\frac{1}{4.3^4}=l3+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\frac{1}{81}-\frac{1}{972}+.$$

. . . .

$$l10=l(9+1)=l9+\frac{1}{9}-\frac{1}{2.9^2}+\frac{1}{9^3.3}-\frac{1}{4.9^4}+\ldots=$$

$$=l9+\frac{1}{9}-\frac{1}{162}+\frac{1}{2187}-\frac{1}{26244}+\ldots\ldots$$

Замѣчаемъ, что ряды сходятся все быстрѣе и быстрѣе, такъ что вычисленіе логариѳмовъ дѣлается все легче и легче. Самымъ труднымъ для вычисленія является рядъ $l2$ (21). Постараемся для облегченія вычисленій замѣнить его рядомъ, сходящимся быстрѣе.

Подставивъ $-x$ вмѣсто x въ формулу (22) получимъ:

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\ldots(23)$$

Вычитая это равенство изъ (22), видимъ, что нечетные члены правой части удваиваются, четные—пропадаютъ. Выписывая результатъ, замѣняемъ разность логариѳмовъ въ лѣвой части логариѳмомъ частнаго:

$$l\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ \ldots\ldots\right)$$

Введемъ теперь новое перемѣнное z, связанное съ x условіемъ:

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{z}=\frac{z+1}{z}.$$

Выражаемъ x черезъ z.

$$x=\frac{1}{2z+1}$$

и подставляемъ въ полученный выше рядъ:

$$l\frac{z+1}{z}=2\left[\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\ \ldots\right]$$

Отсюда:

$$l(z+1)=lz+2\left[\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{5}{5(2z+1)^5}+\ldots\ldots\right]\ldots(24)$$

Эта формула даетъ ряды, сходящіеся гораздо скорѣе; напримѣръ:

$$l2=l(1+1)=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\ldots\ldots\ldots\right]=$$

$$=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{81}+\frac{1}{1215}+\frac{1}{15309}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

§ 5. Разложеніе синуса. Разлагаемъ $\operatorname{Sin}x$ обыкновеннымъ способомъ по теоремѣ Маклорена:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\operatorname{Sin}x & f(0)=0 \\ f'(x)=\operatorname{Cos}x & f'(0)=1 \\ f''(x)=-\operatorname{Sin}x & f''(0)=0 \\ f'''(x)=-\operatorname{Cos}x & f'''(0)=-1 \\ f^{IV}(x)=\operatorname{Sin}x & f^{IV}(0)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$\operatorname{Sin}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2\ldots7}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

Разложеніе это дано *Ньютономъ.*

Выведемъ условіе сходимости этого ряда:

$$u_n=\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}$$

$$u_{n+1}=\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n-1)2n(2n+1)}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{x^2}{2n(2n+1)}$$

$$\lim\frac{u_n}{u_{n+1}}=0.$$

Выведенное равенство не зависитъ отъ x, т. е. ***рядъ сходится при всякой величинѣ*** x.

Составъ ряда синуса показываетъ, что эта фукція ***нечетная***, т. е. знакъ ея мѣняется при перемѣнѣ знака перемѣннаго.

§ 6. Разложеніе косинуса. Тѣмъ же пріемомъ, что и для синуса, получаемъ:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\operatorname{Cos}x & f(0)=1 \\ f'(x)=-\operatorname{Sin}x & f'(0)=0 \\ f''(x)=-\operatorname{Cos}x & f''(0)=-1 \end{array}$$

$$f'''(x)=\operatorname{Sin}x \qquad f'''(0)=0$$
$$f^{IV}(x)=\operatorname{Cos}x \qquad f^{IV}(0)=1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\operatorname{Cos}x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2\ldots6}+\ldots\ldots(26)$$

Подобно предыдущему докажемъ, что *рядъ всегда сходящійся*, т. е. что косинусъ такъ же, какъ и синусъ, принадлежитъ къ разряду функцій, называемыхъ *(г)оломорфными* (ὅλος, μορφή), въ противоположность *мероморфнымъ* (μέρος). Составъ ряда показываетъ, что косинусъ есть функція *четная.*

То же разложеніе косинуса можно получить непосредственно, продифференцировавъ разложеніе синуса.

Интересно то обстоятельство, что, если взять производную косинуса и его ряда, получимъ отрицательный синусъ и отрицательный рядъ синуса. Итакъ, разложеніе синуса и косинуса взаимны въ томъ смыслѣ, что могутъ быть получены одно изъ другого однимъ и тѣмъ же путемъ.

§ 7. Разложеніе arcus-tangens'a. Произведя разложеніе обыкновеннымъ путемъ, замѣчаемъ, что производныя.

$$f(x)=arc.tgx.$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$
$$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f'''(x)=-\frac{2}{(1+x^2)^2}+\frac{2^3x^2}{(1+x^2)^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

получаются все сложнѣе и сложнѣе. Чтобы легче достигнуть цѣли, прибѣгнемъ къ слѣдующему способу: разложимъ въ безконечный рядъ первую производную, а отъ производной перейдемъ затѣмъ къ начальной функціи (этотъ переходъ составляетъ основу *интегральнаго исчисленія*, исчисленія, обратнаго дифференціальному.

Непосредственнымъ дѣленіемъ убѣждаемся (можно также воспользоваться формулой: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.$), что

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots$$

Лѣвая часть есть производная функціи $arctg(x)$, правая производная функціи:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots\ldots+c_1$$

гдѣ c—нѣкоторое постоянное. Равныя производныя принадлежать равнымъ начальнымъ функціямъ; поэтому:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots+c$$

Чтобы опредѣлить постоянное c, возьмемъ $x=0$.

Тогда: $$0=0-0+0-0+\ldots\ldots+c_1$$

откуда $$c=0.$$

Итакъ:

$$arc.\operatorname{tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Формулу эту дали: *Лейбницъ* (*Leibnitz*) въ 1669 году и *Грегори* (*Gregory*).

Находимъ условіе сходимости ряда:

$$un=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$u_{n+1}=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^2(2n-1)}{2n+1}=x^2\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}}=x^2.$$

Итакъ, условіемъ сходимости для ряда arcus tangens'а будетъ:

$$x^2\leqq 1.$$

§ 8. *Разложеніе* π. Вставимъ $x=1$ въ формулу (27). Замѣтивъ, что

$$arc\operatorname{tg}1=\frac{\pi}{4},$$

получимъ:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Этотъ рядъ представляетъ то неудобство, что сходится слишкомъ медленно. Покажемъ другой способъ разложенія π. Положимъ, что:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3},$$

тогда:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Слѣдовательно,

$$\alpha+\beta=45^0=\frac{\pi}{4}.$$

А такъ какъ по условію:

$$\alpha=arc\operatorname{tg}\frac{1}{2}$$

$$\beta=arc\operatorname{tg}\frac{1}{3},$$

то

$$\frac{\pi}{4}=arc\operatorname{tg}\frac{1}{2}+arc\operatorname{tg}\frac{1}{3}.$$

Эти функціи по формулѣ (27) разлагаются въ слѣдующіе ряды:

$$arc.\operatorname{tg}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\ldots\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{160}-\ldots.$$

$$arc.\operatorname{tg}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\ldots\ldots=\frac{1}{3}-\frac{1}{81}+\frac{1}{1215}-\ldots.$$

Ряды эти быстро сходятся.

§ 9. *Разложеніе показательной функціи.*

Имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} f(x)=a^x & f(0)=1 \\ f'(x)=a^x la & f'(0)=la \\ f''(x)=a^x(la)^2 & f''(0)=(la)^2 \\ f'''(x)=a^x(la)^3 & f'''(0)=(la)^3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$a^x=1+xla+\frac{x^2(la)^2}{1.2}+\frac{x^3(la)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Находимъ условіе сходимости.

$$u_n=\frac{x^n(la)^n}{1.2\ldots n}$$

$$\frac{u_{n+1}=\dfrac{x^{n+1}(la)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}}{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{xla}{n+1}}$$

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=0.$$

Итакъ, рядъ сходится при:

$$x=(0,\infty),$$

т.-е. функція голоморфная.

Частный случай разложеніе e^x. Подставивъ e вмѣсто a и замѣтивъ, что

$$le=1,$$

получимъ:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Разложеніе это найдено *Маклореномъ.*

§ 10. Разложеніе функцій рядовъ.

1) Разложеніе степени. Требуется выразить въ видѣ безконечнаго ряда n-ую степень ряда:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.$$

Положимъ, что возвышеніе сдѣлано и мы получили:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$$

Производныя обѣихъ частей должны быть равны:

$$n(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^{n-1}(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)=$$
$$=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots$$

Дѣля на это равенство предыдущее, получимъ:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x+\ldots}{n(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots}=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots}{A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots}$$

откуда:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots)=n(a_1+2a_2x+$$
$$+3a_3x^2+\ldots)(A_0+A_1x+\ldots).$$

Раскрываемъ обѣ части:

$$a_0A_1+\left.\begin{array}{r}2a_0A_2\\ a_1A_1\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}3a_0A_3\\ 2a_1A_2\\ a_2A_1\end{array}\right|x^2+\ldots=na_1A_0+\left.\begin{array}{r}2na_2A_0\\ na_1A_1\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}3na_3A_0\\ 2na_2A_1\\ a_1A_2\end{array}\right|x^2+\ldots$$

По правилу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ заключаемъ:

$$a_0 A_1 = n a_1 A_0$$
$$2a_0 A_2 + a_1 A_1 = 2na_2 A_0 + na_2 A_1$$
$$3a_1 A_0 + 2a_1 A_2 + a_2 A_1 = 3na_3 A_0 + 2na_3 A_1 + na_1 A_2.$$

При помощи этихъ равенствъ можемъ выразить всѣ неопредѣленные коэффиціенты A_1, A_2, $A_3 \ldots$ черезъ A_0:

$$A_1 = \frac{na_1}{a_0} A_0$$

$$A_2 = \frac{(n-1)a_1 \dfrac{na_1}{a_0} + 2na_2}{2a_0} A_0$$

. . . .

Чтобы найти A_0 въ первоначальномъ равенствѣ:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

положимъ $x=0$; тогда:

$$a_0{}^n = A_0.$$

Подставивъ A_0 въ другіе коэффиціенты получимъ:

$$A_1 = na_0{}^{n-1} a_1$$
$$A_2 = n(n-1)a_0{}^{n-2} a_1{}^2 + 2na_0{}^{n-1} a_2$$

. . . .

Коэффиціенты A_1, A_2, $A_3, \ldots$ находятся весьма просто при помощи особаго метода, называемаго *деривированіемъ*. Сущность этого метода заключается въ слѣдующемъ: Положимъ, что:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Такъ какъ по формулѣ Маклорена

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots$$

то по правилу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ:

$$\varphi(0) = a_0$$
$$\varphi'(0) = a_1$$
$$\frac{\varphi''(0)}{1.2} = a_2$$

. . . .

Производную, въ которой перемѣнное замѣнено нулемъ, назовемъ *деривацiей* функціи нуля; употребляя для обозначенія деривацiи букву D. Согласно опредѣленію напишемъ:

$$\varphi'(0) = D\varphi(0)$$

$$\varphi''(0)=D\varphi'(0)$$
$$\varphi^{(n+1)}(0)=D\varphi^{(n)}(0).$$

Подставивъ вмѣсто функціи и производныхъ выраженія ихъ черезъ коэффиціенты a_0, $a_1, \ldots,$ получимъ:

$$a_1=Da_0$$
$$1.2a_2=Da_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1.2.3\ldots n(n+1)a_{n+1}=D1.2.3\ldots na_n=1.2.3\ldots nDa_n$$

или

$$Da_0=a_1$$
$$Da_1=2a_2$$
$$Da_n=(n+1)a_{n+1}.$$

Послѣднее равенство показываетъ, какъ получаются *дериваціи коэффиціентовъ*. Если требуется найти деривацію какой-нибудь функціи коэффиціента, то, воспомнивъ, что дериваціи суть производныя, примѣняемъ правила дифференціальнаго исчисленія, пока не дойдемъ до Da_n, которая выражается выведенной формулой.

Зная, что $A_0=a_0^n$ не трудно найти при помощи деривированія слѣдующіе коэффиціенты:

$$A_1=na_0^{n-1}a_1$$
$$2A_2=n(n-1)a_0^{n-2}a_1^2+2na_0^{n-1}a_2$$
$$2.3.A_3=n(n-1)(n-2)a_0^{n-3}a_1^3+4n(n-1)a_0^{n-2}a_1a_2+$$
$$+2n(n-1)a_0^{n-2}a_1a_2+6na_0^{n-1}a_3.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Деривационное исчисленіе обязано своимъ развитіемъ главнымъ образомъ *Арбогасту*.

2) Разложеніе логариѳма. Положимъ, что

$$l(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$$

Производныя обѣихъ частей суть

$$\frac{a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots}{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots$$

Отсюда:

$$(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)=(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$$
$$(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)=a_0A_1+\left.\begin{matrix}2a_0A_2\\+a_1A_1\end{matrix}\right|x+\left.\begin{matrix}3a_0A_3\\+2a_1A_2\\+a_2A_1\end{matrix}\right|x^2+\ldots$$

и отсюда:

$$a_0 A_1 = a_1 \qquad\qquad A_1 = \frac{a_1}{a^0}$$

$$2a_0 A_2 + a_1 A_1 = 2a_2 \qquad\qquad A_2 = \frac{2a_2 - \frac{a^2_1}{a_0}}{2a_0} = \frac{2a_0 a_2 - a_1{}^2}{2a^2{}_0}$$

$$3a_0 A_3 + 2a_1 A_2 + a_2 A_1 = 3a_2 \qquad\qquad A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Положивъ, $x=0$, найдемъ: $A_0 = l(a_0)$.

Итакъ:

$$l(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = la_0 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{2a_0 a_2 - a_1{}^2}{2a_0{}^2} x^2 + \ldots$$

Способъ деривацій примѣнимъ и въ этомъ случаѣ.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Теорема Муавра и ея слѣдствія.

§ 11. *Теорема Муавра (Moivre).* Разложимъ e^{xi} по формулѣ (30):

$$e^{xi} = 1 + xi + \frac{(xi)^2}{1.2} + \frac{(xi)^3}{1.2.3} + \frac{(xi)^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Соединяя вмѣстѣ дѣйствительные члены и вмѣстѣ мнимые, получимъ:

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots +$$
$$+ i\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \ldots\right)$$

Сравнивая это разложеніе съ рядами:

$$\mathrm{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.6} + \ldots$$

$$\mathrm{Sin}x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \ldots,$$

замѣчаемъ, что: $e^{xi} = \mathrm{Cos}x + i\mathrm{Sin}x$ ……………… (31).

Это замѣчательное соотношеніе между e и двумя тригонометрическими функціями называется *теоремой Муавра.*

§ 12. *Разложеніе гиперболическихъ функцій.*

По теоремѣ Муавра:

$$e^{xi} = \mathrm{Cos}x + i\mathrm{Sin}x$$
$$e^{-xi} = \mathrm{Cos}x - i\mathrm{Sin}x.$$

Отсюда опредѣляемъ:

$$\mathrm{Cos}x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$$

$$i\mathrm{Sin}x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2}.$$

Замѣняя x через yi получаемъ:

$$\mathrm{Cos}yi=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

$$i\mathrm{Sin}yi=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}$$

или

$$\mathrm{Cos}yi=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$$

$$-i\mathrm{Sin}yi=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}.$$

Выраженія $\mathrm{Cos}yi$ и $-i\mathrm{Sin}yi$ называются *гиперболическими тригонометрическими функціями* и обозначаются:

ch(Cosinus hyperbolique)

ch(Sinus hyperbolique).

Вставляя въ ихъ выраженія ряды (по формулѣ 30):

$$e^{y}=1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$e^{-y}=1-y+\frac{y^2}{1.2}-\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots$$

получаемъ:

$$ch=1+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\frac{y^6}{1.2.3..6}+\ldots\ldots\ldots(31a)$$

$$sh=y+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^5}{1.2..5}+\frac{y^7}{1.2...7}+\ldots$$

гиперболическія функціи обладаютъ всѣми свойствами обыкновенныхъ тригонометрическихъ, такъ напримѣръ:

$$\frac{shy}{chy}=thy=\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}.$$

Гиперболическія функціи упрощаютъ нѣкоторые выводы, но не имѣютъ большого значенія въ анализѣ. Теорія ихъ разработана главнымъ образомъ *Gûdermann*'омъ. *Lambert* составилъ таблицы гиперболическихъ функцій:

§ 13. Обобщеніе понятія о логариѳмѣ.

1) Изъ теоремы Муавра и изъ понятія о логариѳмѣ слѣдуетъ:

$$l(\mathrm{Cos}x+i\mathrm{Sin}x)=xi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

т. е. *существуютъ мнимые логариѳмы мнимыхъ количествъ.*

Положимъ, что

$$x=2m\pi,$$

гдѣ m—произвольное цѣлое число. Тогда:

$$l(\mathrm{Cos}2m\pi+i\mathrm{Sin}2m\pi)=2m\pi i.$$

Но такъ какъ

$$\mathrm{Cos}2m\pi=1,$$
$$\mathrm{Sin}2m\pi=0,$$

то получимъ:

$$l1=2m\pi i,$$

т. е. $l1$ *имѣетъ безчисленное множество значеній. Онъ равенъ произведенію всякаго произвольнаго цѣлаго числа на* $2\pi i$. Въ частномъ случаѣ, при $m=0$

$$l1=0.$$

Это значеніе называется *ариѳметическимъ* и изображается $(l1)$, такъ что

$$(l1)=0. \qquad (\alpha)$$

Остальныя значенія, выражаемыя формулой:

$$l1=(l1)+2m\pi i \qquad (\beta)$$

называются *аналитическими.*

2) Возьмемъ:

$$x=(2m+1)\pi.$$

По теоремѣ Муавра:

$$l\Big[\mathrm{Cos}(2m+1)\pi+i\mathrm{Sin}(2m+1)\pi\Big]=(2m+1)\pi i,$$

или

$$l(-1)=(2m+1)\pi i,$$

т. е. $l(-1)$ *равенъ произведенію всякаго нечетнаго числа на* πi.

Замѣчаемъ, что *отрицательное число —1 имѣетъ логариѳмъ.*

3) Всякое число можно представить помноженнымъ на единицу. Слѣдовательно:

$$l(a)=l(a\,.\,1)=la+l1=(la)+2m\pi i.$$

Точно также:

$$l(-a)=l\Big[a(-1)\Big]=la+l(-1)=(la)+(2m+1)\pi i.$$

Итакъ, *всѣ дѣйствительныя числа, и положительныя и отрицательныя, имѣютъ безчисленное множество логариѳмовъ.*

Объясненіемъ этому служитъ слѣдующее обстоятельство. Положимъ, что:

$$z=la,$$

тогда

$$e^z=a,$$

но e^z разлагается по формулѣ (30).

$$1+z+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots=a.$$

z опредѣляется изъ послѣдняго уравненія безконечно-большой степени. А такъ какъ число корней равно степени уравненія, то для $z=la$ получается безчисленное множество значеній.

Для $a=1$ уравненіе обращается въ

$$z+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots=0.$$

Очевидно, что одинъ изъ корней этого уравненія есть 0:

$$z=(l1)=0.$$

4) При

$$x=(4p+1)\frac{\pi}{2}$$

получимъ:

$$l\left[\operatorname{Cos}(4p+1)\frac{\pi}{2}+i\operatorname{Sin}(4p+1)\frac{\pi}{2}\right]=(4p+1)\frac{\pi}{2}i.$$

или:

$$li=(4p+1)\frac{\pi}{2}i.$$

5) Найдемъ *логариѳмъ комплекснаго количества*:

$$a+bi.$$

Представивъ его въ тригонометрическомъ видѣ, получимъ:

$$l(a+bi)=l\rho(\operatorname{Cos}\varphi+i\operatorname{Sin}\varphi)=l\rho+l(\operatorname{Cos}\varphi+i\operatorname{Sin}\varphi).$$

По теоремѣ Муавра:

$$l(\operatorname{Cos}\varphi+i\operatorname{Sin}\varphi)=\varphi i,$$

слѣдовательно:

$$l(a+bi)=l\rho(\operatorname{Cos}\varphi+i\operatorname{Sin}\varphi)=l\rho+\varphi i.$$

Замѣнивъ ρ и φ черезъ:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\varphi=arc.\operatorname{tg}\frac{b}{a}$$

получимъ:

$$l(a+bi)=\frac{1}{2}l(a^2+b^2)+i\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

§ 14. *Выраженіе* $\operatorname{Cos}nx$ и $\operatorname{Sin}nx$ *по степенямъ косинуса и синуса.*

Какъ извѣстно изъ теоріи мнимыхъ величинъ:

$$\operatorname{Cos}nx+i\operatorname{Sin}nx=(\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x)^n.$$

Разлагая вторую часть, получимъ:

$$\operatorname{Cos}nx+i\operatorname{Sin}nx=\operatorname{Cos}^n x+n\operatorname{Cos}^{n-1}xi\operatorname{Sin}x+\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{Cos}^{n-2}x(i\operatorname{Sin}x)^2+\ldots=$$

$$=\operatorname{Cos}^n x+in\operatorname{Cos}^{n-1}x\operatorname{Sin}x-\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{Cos}^{n-2}x\operatorname{Sin}^2x-\ldots.$$

Отдѣливъ дѣйствительную часть отъ мнимой, имѣемъ:

$$\operatorname{Cos}xn+i\operatorname{Sin}nx=\operatorname{Cos}^n x-\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{Cos}^{n-2}x\operatorname{Sin}^2x+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\operatorname{Cos}^{n-4}x\operatorname{Sin}^4x-\ldots+$$

$$+i\left[n\operatorname{Cos}^{n-1}x\operatorname{Sin}x-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\operatorname{Cos}^{n-3}x\operatorname{Sin}^3x+\ldots\right].$$

Отсюда (по теоремѣ о равенствѣ мнимыхъ количествъ):

$$\operatorname{Cos}nx=\operatorname{Cos}^n x-\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{Cos}^{n-2}x\operatorname{Sin}^2x+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\operatorname{Cos}^{n-4}x\operatorname{Sin}^4x-\ldots\ldots\ldots(34)$$

$$\operatorname{Sin}nx=n\operatorname{Cos}^{n-1}x\operatorname{Sin}x-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\operatorname{Cos}^{n-3}x\operatorname{Sin}^3x+\ldots(35).$$

Формулы эти даны *Эйлеромъ* (1707—1783).

§ 15. *Выраженіе степеней* $\operatorname{Cos}x$ и $\operatorname{Sin}x$ *по кратнымъ дугамъ.*

1. Косинусъ. Положимъ, что:

$$e^{xi}=\operatorname{Cos}x+i\operatorname{Sin}x=u$$

$$e^{-xi}=\operatorname{Cos}x-i\operatorname{Sin}x=v.$$

Отсюда:

$$2\operatorname{Cos}x=u+v$$

$$2^n\operatorname{Cos}^n x=(u+v)^n.$$

Разлагаемъ послѣднее выраженіе и пишемъ то же разложеніе въ обратномъ порядкѣ членовъ:

$$2^n\mathrm{Cos}^n x = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \ldots + v^n$$

$$2^n\mathrm{Cos}^n x = v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 + \ldots + u^n.$$

Замѣтивъ, что:

$$u^m + v^m = e^{mxi} + e^{-mxi} = (\mathrm{Cos}mx + i\mathrm{Sin}mx) + (\mathrm{Cos}mx - i\mathrm{Sin}mx) = 2\mathrm{Cos}mx.$$

и

$$u^m v^m = e^{mxi}e^{-mxi} = 1,$$

складываемъ полученные ряды:

$$2.2^n\mathrm{Cos}^n x = (u^n + v^n) + n(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots + (v^n + u^n).$$

$$2^{n+1}\mathrm{Cos}^n x = 2\mathrm{Cos}nx + n2\mathrm{Cos}(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}2\mathrm{Cos}(n-4)x + \ldots + 2\mathrm{Cos}nx,$$

или, сократив на 2:

$$2^n\mathrm{Cos}^n x = \mathrm{Cos}nx + n\mathrm{Cos}(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{Cos}(n-4)x + \ldots \quad (96).$$

II. Синусъ. Чтобы получить формулу для синуса, нужно, очевидно, въ рядъ косинуса вмѣсто x вставить $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Получимъ тогда:

$$2^n\mathrm{Sin}^n x = \mathrm{Cos}n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + n\mathrm{Cos}(n-2)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathrm{Cos}(n-4)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \ldots\ldots$$

Раскрываемъ косинусы, входящіе въ каждый членъ:

$$\mathrm{Cos}n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{Cos}\left(\frac{n\pi}{2} - nx\right) = \mathrm{Cos}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Cos}nx + \mathrm{Sin}\frac{n\pi}{2}\mathrm{Sin}nx$$

$$\mathrm{Cos}(n-2)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{Cos}\left[\frac{(n-2)\pi}{2} - (n-2)x\right] =$$

$$= \mathrm{Cos}\frac{(n-2)\pi}{2}\mathrm{Cos}(n-2)x + \mathrm{Sin}\frac{(n-2)\pi}{2}\mathrm{Sin}(n-2)x.$$

$$\mathrm{Cos}\frac{(n-2)\pi}{2} = \mathrm{Cos}\left(\frac{n\pi}{2} - \pi\right) = -\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{2}$$

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{n-2}{2}\right)\pi = \mathrm{Sin}\left(\frac{n\pi}{2} - \pi\right) = -\mathrm{Sin}\frac{n\pi}{2}$$

$$\operatorname{Cos}(n-2)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\left[\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}\operatorname{Cos}(n-2)x+\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\operatorname{Sin}(n-2)x\right]$$

$$\operatorname{Cos}(n-4)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}\operatorname{Cos}(n-4)x+\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\operatorname{Sin}(n-4)x.$$

Подставивъ эти значенія и вынося за скобки $\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}$ и $\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}$, получимъ:

$$2^n\operatorname{Sin}^n x=\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}\left[\operatorname{Cos}nx-n\operatorname{Cos}(n-2)x+\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{Cos}(n-4)x-\ldots\right]+$$
$$+\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{2}\left[\operatorname{Sin}nx-n\operatorname{Sin}(n-2)x+\frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{Sin}(n-4)x-\ldots\right].\quad(37)$$

Замѣтимъ, что, если n—нечетное, то $\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{2}$ обращается въ нуль, и остается одна вторая часть; если n—четное, остается одна вторая часть. Если n—число дробное, рядъ безконеченъ и имѣетъ обѣ части.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Теорія неопредѣленныхъ выраженій.

Неопредѣленныя выраженія стали предметомъ изученія съ 1696 г., когда на нихъ обратилъ вниманіе *Иванъ Бернулли*. Кромѣ Бернулли разработкой ихъ теоріи занимался *L'Hospital*.

§ 16. Первый видъ неопредѣленности:

$$\frac{0}{0}.$$

Положимъ, что

$$\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]=\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{0}{0}.$$

Выраженіе, обращающееся въ $\frac{0}{0}$ имѣетъ обыкновенно вполнѣ опредѣленное значеніе, такъ какъ оно вполнѣ опредѣленно при x, произвольно-мало отличающемся отъ a:

Воспользуемся теоремой Коши (1), которая выражается въ видѣ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)}, \text{ если } f(a)=0 \text{ и } F(a)=0.$$

Положивъ $h=0$, получимъ:

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Равенство это, конечно, можно распространить:

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}=\frac{f''(a)}{F''(a)}=\ldots$$

Эта формула показываетъ, что вмѣсто отношенія функцій можно взять отношеніе производныхъ.

Если и это отношеніе обращается въ $\frac{0}{0}$, можно взять отношеніе вторыхъ производныхъ и т. д.

Примѣры. 1) Имѣемъ:

$$\left[\frac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3}\right]_{x=1}=\frac{0}{0}.$$

Продифференцировавъ числитель и знаменатель, получимъ:

$$\left[\frac{3x^2-3}{4x^3-12x+8}\right]_{x=1}=\frac{0}{0}.$$

Второе дифференцированіе даетъ:

$$\left[\frac{6x}{12x^2-12}\right]_{x=1}=\frac{6}{0}=\infty.$$

Итакъ,

$$\left[\frac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3}\right]_{x=1}=\infty.$$

2) Имѣемъ:

$$\left[\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{Sin}x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}.$$

Послѣдовательнымъ дифференцированіемъ числителя и знаменателя получаемъ:

$$\left[\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\operatorname{Cos}x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}.$$

$$\left[\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{Sin}x}\right]_{x=0}=\frac{0}{0}$$

$$\left[\frac{e^x+e^{-x}}{\operatorname{Cos}x}\right]_{x=0}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Слѣдовательно:

$$\left[\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{Sin}x}\right]_{x=0}=2.$$

Тотъ же результатъ получимъ, разлагая въ ряды числитель и знаменатель

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$$

$$\operatorname{Sin}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2\dots5}-\dots$$

Въ числителѣ будетъ:

$$\left(2x+2\frac{x^3}{1.2.3}+2\frac{x^5}{1.2\dots5}+\dots\right)\ 2x,$$

въ знаменателѣ:

$$x-\left(x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\dots\right).$$

Вся дробь представится въ видѣ:

$$\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{Sin}x}=\frac{2\frac{x^3}{1.2.3}+2\frac{x^5}{1.2\dots5}+\dots}{\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{x^5}{1.2\dots5}+\dots}$$

По сокращеніи на x^3, останется:

$$\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{Sin}x}=\frac{2\frac{1}{1.2.3}+2\frac{x^2}{1.2\dots5}+\dots}{\frac{1}{1.2.3}-\frac{x^2}{1.2\dots5}+\dots}$$

При $x=0$, получится:

$$\left[\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{Sin}x}\right]_{x=0}=\frac{2\frac{1}{1.2.3}}{\frac{1}{1.2.3}}=2.$$

3) Имѣемъ квадратное уравненіе:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Корни его, какъ извѣстно суть:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ca}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ca}}{2a}$$

При a равномъ нулю:

$$[x_1]_{a=0}=\left[\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]_{a=0}=\frac{0}{0}$$

$$[x_2]_{a=0}=\left[\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]_{a=0}=\frac{-2b}{0}=\pm\infty.$$

Найдемъ истинную величину перваго корня. Для этого умножимъ числителя и знаменателя на $b+\sqrt{b^2-4ac}$:

$$\frac{b^2-4ac-b^2}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-4c}{2(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ca}}=\frac{-c}{b}.$$

Итакъ $$[x_1]_{a=0}=-\frac{c}{b}.$$

Ту же величину получаемъ, если положимъ $a=0$ въ самомъ уравненіи. Уравненіе въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ:

$$bx+c=0.$$

Такимъ образомъ уравненіе первой степени можно разсматривать, какъ квадратное, имѣющее нуль коеффиціентомъ при квадратѣ неизвѣстнаго. Въ такомъ случаѣ оно удовлетворяется еще безконечнымъ рѣшеніемъ. Вообще, всякое уравненіе можно разсматривать, какъ уравненіе высшей степени съ нулевыми коеффиціентами при старшихъ степеняхъ неизвѣстнаго и приписывать ему соотвѣтствующее число безконечныхъ рѣшеній.

§ 17. *Второй видъ.*

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Имѣемъ:

$$\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Положимъ, что:

$$f(x)=y$$
$$F(x)=z$$

тогда: $$\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]_{x=a}=\frac{y}{z}_{x=a}=\frac{1}{z}:\frac{1}{y}_{x=a}$$

но:
$$\left[\frac{1}{y}\right]_{x=a}=\left[\frac{1}{f(x)}\right]_{x=a}=\frac{1}{\infty}=0.$$
$$\left[\frac{1}{z}\right]_{x=a}=\left[\frac{1}{F(x)}\right]_{x=a}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Слѣдовательно: $$\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}$$

Такимъ образомъ мы пришли къ первому случаю. Продифференцировавъ числитель и знаменатель выраженія:
$$\left[\frac{1}{z}:\frac{1}{y}\right]_{x=a},$$
получимъ: $$\left[\frac{y}{z}\right]_{x=a}=\left[\frac{-z^1}{z^2}:\frac{-y^1}{y^2}\right]_{x=a}=\left[\frac{y^2}{z^2}\right]_{x=a}\left[\frac{z^1}{y^1}\right]_{x=a}$$

Отсюда $$1=\left[\frac{y}{z}\right]_{x=a}\left[\frac{z'}{y'}\right]_{x=a}$$

или
$$\left[\frac{y}{z}\right]_{x=a}=\left[\frac{y'}{z'}\right]$$
$$\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}\right]_{x=a}$$
т. е. правило остается то же самое.

Примѣчаніе. Если дробь принимаетъ неопредѣленный видъ при $a=\infty$, то правило сохранитъ свою силу. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ: $$x=\frac{1}{y},$$

такъ что $$\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{F\left(\frac{1}{y}\right)}\right]_{y=0}$$

Продифференцировавъ числитель и знаменатель второй части, получимъ:
$$\left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{-f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}}{-F'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}}\right]_{y=0}=$$
$$=\left[\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{F'\left(\frac{1}{y}\right)}\right]_{y=0}=\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}\right]_{x=\infty}$$

Всѣ слѣдующіе случаи неопредѣленности сводятся къ двумъ первымъ, или вѣрнѣе, къ первому одному.

§ 18. *Третій видъ.*

$$0 . \infty.$$

Положимъ, что $[y . z]_{x=a}=0 . \infty$

Имѣемъ: $[y . z]_{x=a}=\left[y : \frac{1}{z}\right]_{x=a}=0 : \frac{1}{\infty}=\frac{0}{0}.$

Можемъ получить также:

$$[y . z]_{x=a}=\left[z : \frac{1}{y}\right]_{x=a}=\infty : \frac{1}{0}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Примѣръ. Имѣемъ:

$$[xlx]_{x=0}=0 . -\infty.$$

Представимъ произведеніе въ видѣ частнаго:

$$[xlx]_{x=0}=\left[lx : \frac{1}{x}\right]_{x=0}=\frac{-\infty}{\infty}.$$

Затѣмъ, дифференцируемъ числитель и знаменатель:

$$[xlx]_{x=0}=\left[\frac{1}{x} : -\frac{1}{x^2}\right]_{x=0}=[-x]_{x=0}=0.$$

§ 19. *Четвертый, пятый и шестой виды:*

$$0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Всѣ эти формы неопредѣленности можно представить въ видѣ.

$$s=y^z,$$

при чемъ для $x=a$ имѣемъ въ каждомъ изъ трехъ случаевъ:

4) ...... $y=0$ $z=0$

5) ...... $y=\infty$ $z=0$

6) ...... $y=1$ $z=\infty$.

Прологариѳмировавъ нашу общую функцію, получимъ:

$$ls=zly$$

и въ частныхъ случаяхъ:

4)........$ls=0 . (-\infty)$

5)........$ls=0 . \infty$

6)........$ls=\infty . 0$.

Получились уже разобранные случаи. Вычисливъ истинную величину ls, мы найдемъ и s по формулѣ:

$$s=e^{k},$$

гдѣ k—истинная величина логариѳма s.

Примѣръ. Дана функція

$$s=\Big[x^x\Big]_{x=0}$$

Логариѳмированіемъ получимъ:

$$ls=xlx=\frac{lx}{\frac{1}{x}}.$$

Взявъ производныя числителя и знаменателя, получимъ:

$$\Big[ls\Big]_{x=0} \quad \Big[\frac{1}{x}:-\frac{1}{x^2}\Big]_{x=0}=[-x]_{x=0}=0$$

и затѣмъ:

$$s=e^0,=1.$$

§ 20. Седьмой видъ.

$$\infty-\infty.$$

Имѣемъ:

$$\Big[s\Big]_{x=a}=\Big[\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\Big]_{x=a}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty.$$

Приведя $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ къ одному знаменателю, получимъ:

$$\Big[s\Big]_{x=a}=\Big[\frac{z-y}{yz}\Big]_{x=a}=\frac{0-0}{0-0}=\frac{0}{0}.$$

Для опредѣленія истиннаго значенія выраженій, обращающихся въ $\frac{0}{0}$, иногда даже не бываетъ надобности дифференцировать. Это бываетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда множители или слагаемыя, вводящія неопредѣленность, сокращаются или приводятся къ нулю. Возьмемъ для примѣра выраженіе:

$$\sqrt{x^2+ax+b}-x,$$

которое при x, равнымъ безконечности, обращается въ

$$\Big[\sqrt{x^2+ax+b}-x\Big]_{x=\infty}=\infty-\infty.$$

Умноживъ и раздѣливъ это выраженіе на

$$\sqrt{x^2+ax+b}+x,$$

получимъ:

$$\left[\sqrt{x^2+ax+b}-x\right]_{x=\infty}=\left[\frac{x^2+ax+b-x^2}{\sqrt{x^2+ax+b}+x}\right]_{x=\infty}=$$

$$=\left[\frac{a+\frac{b}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+1}\right]_{x=\infty}=\frac{a}{2}.$$

§ 21. О порядкахъ и породахъ безконечностей. Если $x=\infty$, то x^2 есть безконечность второго порядка, x^3—третьяго x^n—n-аго порядка, выраженіе же:

$$a^x,$$

безконечность, которая не можетъ уже быть измѣрена порядками, безконечность другой *породы*. Выраженіе.

$$a^{a^x}$$

есть безконечность *третьей породы* и т. д. Докажемъ, что *безконечность второй породы въ безконечное число разъ больше всякой безконечности первой породы*, т. е. что:

$$\left[\frac{a^x}{x^n}\right]_{x=\infty}=\infty.$$

Такъ какъ при $x=\infty$ выраженіе принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$, то для нахожденія истиннаго значенія его дифференцируемъ числитель и знаменатель n разъ:

$$\left[\frac{a^x}{x^n}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{a^x.la}{nx^{n-1}}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{a^x(la)^2}{n(n-1).x^{n-2}}\right]_{x=\infty}=\ldots=$$

$$=\left[\frac{a^x(la)^n}{1.2\ldots(n-1)n}\right]_{x=\infty}=\infty.$$

Замѣчаемъ, что степень безконечности знаменателя все понижается, такъ что, наконецъ, можетъ сдѣлаться равной нулю, т. е. получится постоянное число, тогда какъ въ числителѣ безконечность остается та же самая. Итакъ,

$$\left[\frac{a^x}{x^n}\right]_{x=\infty}=\infty.$$

Обратная порода безконечностей есть:

$$l(x),$$

за ней:

$$l^2x.\ l^3x\ldots.$$

Для этихъ породъ доказывается, что онѣ меньше въ безконечное число разъ безконечности перваго порядка, т.-е.

$$\left[\frac{(lx)^n}{x}\right]_{x=\infty}=0.$$

Для доказательства дифференцируемъ опять числителя и знаменателя.

$$\left[\frac{(lx)^n}{x}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{n(lx)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}}{1}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{n(n-1)(lx)^{n-2}\cdot\frac{1}{x}}{1}\right]_{x=\infty}=\ldots$$

$$=\left[\frac{1.2.3\ldots(n-1)n\frac{1}{x}}{1}\right]_{x=\infty}=0.$$

§ 22. Приложеніе теоріи неопредѣленныхъ выраженій къ ученію о сходимости рядовъ по ихъ внѣшнему виду.

Выраженіе $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$, входящее въ основной признакъ сходимости д'Аламбера есть, собственно, неопредѣленное выраженіе, такъ какъ:

$$[u_n]_{n=\infty}=0$$
$$[u_{n+1}]_{n=\infty}=0.$$

Продифференцировавъ числитель и знаменатель, получимъ:

$$\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n=\infty}=\left[\frac{u'_{n+1}}{u'_n}\right]_{n=\infty}<1.$$

Отсюда заключаемъ, что, *если рядъ сходящійся, то и рядъ его производныхъ тоже сходящійся.*

§ 23. Теорема I. Эта теорема выражается такъ: *Если*

$$[F(x)]_{x=\infty}=\infty,\text{ то }\lim\left[\frac{F(x)}{x}\right]_{x=\infty}=\lim[F(x+1)-F(x)]_{x=\infty}.$$

Доказательство. Взявъ производныя числителя и знаменателя лѣвой части, получимъ:

$$\lim\left[\frac{F(x)}{x}\right]_{x=\infty}=\lim[F'(x)]_{x=\infty}.$$

По теоремѣ Тейлора имѣемъ:

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x+\Theta h),$$

откуда:

$$F'(x+\Theta h)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Очевидно, что:

$$\lim[F'(x+\Theta h)]_{x=\infty}=\lim[F'(x)]_{x=\infty}.$$

Слѣдовательно:

$$\lim\left[\frac{Fx}{x}\right]_{x=\infty}=\lim[F'(x+\Theta h)]_{x=\infty}=\lim\left[\frac{F(h+x)-F(x)}{h}\right]_{x=\infty}.$$

Положивъ: $h=1$,

получимъ: $$\lim\left[\frac{F(x)}{x}\right]_{x=\infty}=[\lim F(x+1)-F(x)]_{x=\infty}.$$

§ 24. *Теорема II.* Теорема выражается такъ: *Если* $[F(x)]_{x=\infty}=\infty$, то $\lim\left[\left\{F(x)\right\}^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=\lim\left[\frac{F(x+1)}{F(x)}\right]_{x=\infty}$.

Доказательство. Возьмемъ предѣлъ логариѳма разсматриваемаго выраженія:

$$\lim\left[l\left\{F(x)\right\}^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=\lim\left[\frac{lF(x)}{x}\right]_{x=\infty}.$$

Примѣнимъ теперь первую теорему, (считая $lF(x)$ за функцію x)

$$\lim\left[\frac{lF(x)}{x}\right]_{x=\infty}=\lim[lF(x+1)-lF(x)]_{x=\infty}=\lim\left[l\frac{F(x+1)}{F(x)}\right]_{x=\infty}:$$

получили равенство предѣловъ логарифмовъ.

Отъ логарифмовъ можно перейти къ начальнымъ функціямъ:

$$\lim\left[\{F(x)\}^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=\lim\left[\frac{F(x+1)}{F(x)}\right]_{x=\infty}.$$

§ 25. *Приложеніе теоремы II къ теоріи сходимости рядовъ.* Теорему можно приложить къ разъясненію одного вопроса теоріи сходимости рядовъ. Положимъ что:

$$F(n)=\frac{1}{u_n}.$$

При $n=\infty$ функція $F(n)$ обращается въ безконечность, слѣдовательно, условіе теоремы II выполняется. Примѣняя эту теорему, получимъ:

$$\lim\left[\left(\frac{1}{u_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]_{n=\infty}=\lim\left[\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]_{n=\infty}.$$

Первая часть входитъ въ признакъ сходимости *Коши*, вторая въ признакъ д'*Аламбера*.

Отсюда заключаемъ, что *признаки Коши и д'Аламбера тождественны*.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Теорія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ (Maxima и minima) функцій одного перемѣннаго.

Опредѣленіе. Наибольшей величиной (maximum) аналитической функціи или наименьшей (maximum) называется величина большая или меньшая смежныхъ.

§ 26. Выводъ правила при помощи таблицъ знаковъ производныхъ.

Положимъ, что функція

$$y - f(x)$$

обращается въ *Max* при x_1 равномъ a, т. е., что

$$f(a) - Max.$$

Если черезъ h обозначимъ произвольно малое приращеніе перемѣннаго, то по опредѣленію Maximum'а имѣемъ:

$$f(a+h)<f(a)$$
$$f(a-h)<f(a),$$

или же $f(a)$ есть minimum, то

$$f(a+h)>f(a)$$
$$f(a-h)>f(a)$$

мы видимъ, что $f(x)$ въ случаѣ *Max.* приближается къ значенію $f(a)$ возрастая; перейдя черезъ *Max.* она начинаетъ убывать. Мы знаемъ, что производная возрастающей функціи положительна, производная убывающей—отрицательна. Переходу функціи отъ возрастанія къ убыванію соотвѣтствуетъ переходъ первой производной отъ положительнаго значенія къ отрицательному, т. е. обращеніе ея въ нуль. Итакъ, *для случая Maximum'а*

$$f'(a)=0.$$

Въ случаѣ minimum'а функція переходитъ отъ убыванія къ возрастанію; слѣдовательно, производная ея тоже равна нулю:

$$f'(a)=0.$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить значенія a. Но такъ какъ уравненіе это одно и въ случаѣ *Max.* и въ случаѣ *min*, то полученные корни могутъ быть Maximum'ами и minimum'ами. Чтобы разобраться, какіе корни соотвѣтствуютъ *Max.* и какіе *min.* прибѣгаемъ къ помощи второй производной.

До значенія *Max.* функція возрастаетъ, потомъ убываетъ. Первая производная ея до *Max.* положительна, послѣ *Max.* отрицательна. Слѣдовательно, эта производная убываетъ, а потому *для Max. вторая производная отрицательна.*

При прохожденіи черезъ *min.* первая производная возрастаетъ; слѣдовательно, *для min вторая производная положительна.*

Результаты изслѣдованія для обоихъ случаевъ помѣщаемъ для наглядности въ таблицахъ:

	Max.				*min.*		
x	$a-h$	a	$a+h$	x	$a-h$	a	$a+h$
$f(x)$	возр.	M	убыв.	$f(x)$	убыв.	m	возр.
$f'(x)$	$+$	c	$-$	$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$		$f''(x)$		$+$	

Посмотримъ теперь, что будетъ, если вторая производная равна нулю. Съ этого мѣста придется вести изслѣдованіе, начиная съ конца. Итакъ, положимъ сначала, что *третья производная положительна.* Въ этомъ случаѣ вторая производная возрастаетъ; при x равномъ a, она по условію равна нулю. Слѣдовательно, до a она отрицательна, послѣ a — положительна. Пока она отрицательна первая производная убываетъ. Но, такъ какъ при a первая производная есть нуль, то до a она положительна. Послѣ a вторая производная положительна, слѣдовательно, первая возрастаетъ, а потому тоже положительна. Итакъ, первая производная и до a и послѣ a положительна; слѣдовательно, функція и до a и послѣ a возрастаетъ и *при a нѣтъ ни Max. ни Min.*

Тотъ же результатъ получится, если третья производная отрицательна.

Результаты помѣщаются въ слѣдующихъ таблицахъ, которыя читаются снизу вверхъ:

x	$a-h$	a	$a+h$	x	$a-h$	a	$a+h$
$f(x)$	возр.		возр.	$f(x)$	убыв.		убыв.
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'''(x)$		$+$		$f'''(x)$		$-$	

Продолжимъ изслѣдованіе, предположивъ, что и третья производная обратилась въ нуль. Опять разсматриваемъ случаи, когда четвертая производная положительна и отрицательна; изслѣдованіе представляемъ въ двухъ таблицахъ. Начинается оно съ конца и постепенно доходитъ до самой функціи

x	$a-h$	a	$a+h$	x	$a-h$	a	$a+h$
$f(x)$	убыв.	*min*	возр.	$f(x)$	возр.	*Max.*	возр.
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	$f''(x)$	$-$	0	$-$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$	$f'''(x)$	$+$	0	$-$
$f_{IV}(x)$		$+$		$f^{IV}(x)$		$-$	

Такимъ образомъ, знакъ четвертой производной даетъ то-же, что и знакъ второй. Не трудно замѣтить, что *всѣ производныя четныя и всѣ нечетныя вліяютъ одинаково*, такъ какъ въ таблицахъ строки повторяются черезъ одну.

На основаніи всего вышесказаннаго выводимъ *правило для нахожденія maximum'a и minimum'a. Приравнявъ нулю первую производную, опредѣляемъ изъ полученнаго уравненія значенія x. Значенія, соотвѣтствующія maximum'амъ при подстановкѣ во вторую производную даютъ —, minimum'ы +. При обращеніи въ нуль второй производной, пользуемся слѣдующими четными производными.* При необращеніи въ нуль нечетной производной, полученныя значенія не даютъ ни *Max.* ни *min.*

§ 28. Выводъ правила при помощи ряда Тейлора. Имѣемъ для *Max.*

$$f(a+h)-f(a)<0.$$

Рядъ Тейлора даетъ

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\dots$$

Слѣдовательно:

$$hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+\dots<0.$$

Изъ высшей алгебры извѣстно, что при достаточно малой величинѣ перемѣннаго, на знакъ многочлена вліяетъ только знакъ младшаго члена. Въ нашемъ случаѣ на знакъ многочлена вліяетъ членъ:

$$hf'(a).$$

Такъ какъ знакъ многочлена долженъ быть постояннымъ то и знакъ этого члена долженъ быть постояннымъ. Но приращеніе h можетъ быть и положительно, и отрицательно. Слѣдовательно, для *Max.* необходимо предположить

$$f'(a)=0.$$

То-же самое должно быть и для *min.*, гдѣ многочленъ долженъ быть больше нуля.

Теперь остается младшимъ членъ:

$$\frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a).$$

Знакъ приращенія на него не вліяетъ, такъ какъ оно входитъ въ квадратѣ. Вліяетъ только знакъ второй производной, который долженъ согласоваться со знакомъ всего многочлена. Слѣдовательно, для *Max.* онъ есть $-$, для *min.* $+$.

При обращеніи въ нуль первыхъ производныхъ, ихъ мѣсто заступаютъ слѣдующія. Если нечетная производная не обращается въ нуль, знакъ многочлена зависитъ отъ знака приращенія, что противорѣчитъ условіямъ *Max.* и *min.*

Свойства, полученныя этимъ способомъ, вполнѣ согласны съ полученными раньше.

§ 26. *Геометрическое значеніе наибольшихъ и наименьшихъ величинъ.* Равенство

$$y=f(x)$$

есть вообще уравненіе плоской кривой. Max. функціи $f(x)$ есть наибольшая величина ординаты y, min -наименьшая. Первая производная есть, какъ извѣстно, для прямоугольныхъ координатъ, тангенсъ угла касательной къ кривой съ осью x. Теорія показала намъ, что для Max. и min онъ равенъ нулю, т. е. соотвѣтствующій элементъ кривой параллеленъ оси x (черт. 7). До Max. функція возрастаетъ, ордината увеличивается, производная положительна, tg угла положителенъ (напр. $\operatorname{tg}\alpha$). Послѣ Max. ордината уменьшается, tg угла отрицателенъ ($\operatorname{tg}\beta$). Для min явленіе обратное.

Вторая производная, какъ увидимъ дальше показываетъ *направленіе кривизны.* Положительнымъ считается выпуклость въ сторону оси x, какъ и имѣемъ для min. Отрицательная кривизна выпукла въ обратную сторону, какъ и оказывается для Max. Случаю:

$$f''(a)=0 \qquad f'''(a)=+$$

т. е. ни Max., ни min не соотвѣтствуетъ точка N на черт 8. точка перегиба. Въ этомъ мѣстѣ кривизны нѣтъ, кривая распрямляется и мѣняетъ кривизну. Точка N' (черт. 9) соотвѣтствуетъ случаю:

$$f''(a)=0, \qquad f'''(a)=-$$

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Теорія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ (Maxima et minima) функцій со многими перемѣнными.

§ 29. *Общій способъ нахожденія Maximum'а и minimum'а.* Опредѣленіе Max. и min функцій одного перемѣннаго распространяется и на случай многихъ перемѣнныхъ и показываетъ, что, если

$$f(a,b,c)=\text{Max.}f(x,y,z),$$

то

$$f(a\pm\Delta x,\ b\pm\Delta y,\ c\pm\Delta z)<f(a,b,c),$$

и если

$$f(a,b,c)=\min f(x,y,z),$$

то

$$f(a\pm\Delta x,\ b\pm\Delta y,\ c\pm\Delta z)>f(a,b,c).$$

Перемѣнныя x, y, z можно считать различными функціями одного произвольнаго перемѣннаго t, такъ что:

$$u=f(x,y,z)=f\left[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right]=F_1(t).$$

Выберемъ это произвольное такъ, чтобы функціи

$$x=\varphi(t)$$
$$x=\psi(t)$$
$$z=\chi(t)$$

обращались въ a, b, c при одномъ и томъ же его значеніи t. Тогда мы можемъ разсматривать нашу функцію u, какъ функцію одного перемѣннаго t, обращающуюся въ Max или min, при нѣкоторомъ значеніи этого перемѣннаго t. Чтобы найти это означеніе, поступаемъ по извѣстнымъ уже правиламъ для нахожденія Max. и min. функціи одного перемѣннаго: приравниваемъ нулю первую производную:

$$\frac{du}{dt}=0$$

Напишемъ эту производную въ раскрытомъ видѣ (ч. I, § 34).

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0.$$

Помноживъ все на dt, получимъ:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0,$$

т. е. *значенія перемѣнныхъ, обращающія въ Max. или min функцію, обращаютъ въ нуль ея первый дифференціалъ.*

Такъ какъ dx, dy, dz совершенно произвольны, то послѣднее равенство можетъ существовать только при:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

такимъ образомъ видимъ, что *для нахожденія значеній, обращающихъ функцію въ Max. или min, достаточно приравнять нулю всѣ частныя производныя.*

Чтобы различить случай Max. или min., беремъ вторую производную по t:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}\cdot\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{dz^2}{dt^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial z}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y . \partial z}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Если она отрицательна, то испытуемыя значенія соотвѣтствуютъ Max., если положительна,— min. Такъ какъ dt^2 всегда положительно, то вмѣсто производной можно взять второй дифференціалъ по t, т. е. второй полный дифференціалъ:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial z}dx . dz +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dy . dz.$$

Если этотъ дифференціалъ обращается въ нуль, берутъ слѣдующіе четные дифференціалы, если только нечетные дифференціалы всѣ нули.

§ 30. *Нахожденіе Max. и min функціи двухъ перемѣнныхъ.* Имѣемъ функцію:

$$u = f(x, y).$$

Приравниваемъ нулю ея частныя производныя

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Находимъ отсюда систему корней:

$$\begin{array}{ll} x=a_1 & y=b_1 \\ x=a_2 & y=b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x=a_\mu & y=b_\mu \end{array}$$

Для отдѣленія Max и min, корни эти надо вставить во вторую производную по t или во второй полный дифференціалъ:

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial y}dx\,.\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

Вынеся за скобку dx^2 и обозначивъ $\frac{dy}{dx}$ черезъ p, можемъ представить этотъ дифференціалъ въ видѣ.

$$d^2u=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}p^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial x}p+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]dx^2,$$

или введя обозначенія:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}=A$$

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial y}=B$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=C,$$

получимъ:

$$d^2u=[Ap^2+Bp+C]dx^2.$$

Знакъ этого выраженія рѣшаетъ, обращаютъ ли испытуемые корни функцію въ Max. или въ min. Что бы знакъ не зависѣлъ отъ приращеній перемѣнныхъ, нужно, чтобы трехчленъ, стоящій въ скобкахъ, имѣлъ постоянный знакъ, такъ какъ dx^2 всегда положительно. Знакъ квадратнаго трехчлена, какъ извѣстно изъ элементарной алгебры, не зависитъ отъ коеффиціентовъ, когда корни его (если приравнять трехчленъ нулю). мнимы, т. е., когда:

$$B^2-4AC<0.$$

или

$$\left[\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial y}\right)^2-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{x=a,\ y=b}<0.$$

Это, слѣдовательно, есть необходимое условіе, чтобы корни обращали функцію, или въ Max., или въ min. Чтобы они обращали въ Max., нужно, чтобы трехчленъ:

$$Ap^2+Bp+C$$

былъ отрицательнымъ, а для этого нужно, чтобы:

$$A<0;$$

для min. необходимо, чтобы

$$A>0$$

Но такъ какъ по условію

$$B^2<4AC,$$

то A имѣетъ всегда тотъ же знакъ, что и C, а потому эти условія можно замѣнить слѣдующими:

$$C<0$$
$$C>0.$$

Итакъ, условіями Max. являются.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0 \ldots\ldots\ldots\ldots (39a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0; \ldots\ldots\ldots\ldots (39b)$$

для min:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0 \ldots\ldots\ldots (39c)$$

Второй дифференціалъ обращается въ нуль, если обращается въ нуль трехчленъ:

$$Ap^2+Bp+C;$$

послѣднее бываетъ тогда, когда оба корня трехчлена равны p. Въ этомъ случаѣ:

$$B^2-4AC=0 \text{ и } p=-\frac{B}{2A}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x . \partial y}}{2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

По правилу въ этомъ случаѣ изслѣдуемъ слѣдующіе дифференціалы, вставляя туда только что полученное значеніе p

§ 31. *Нахожденіе Max. и min. функціи трехъ перемѣнныхъ.* Если требуется найти Max и min. функціи

$$u=f(x, y, z),$$

то, поступая такъ, какъ дѣлали раньше, приравниваемъ нулю частныя производныя:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Получаемъ систему корней:

$$\begin{array}{lll} x=a_1 & y=b_1 & z=c_1 \\ x=a_2 & y=b_2 & z=c_2 \\ x=a_\mu & y=b_\mu & z=c_\mu \end{array}$$

Эти корни вставляемъ во второй дифференціалъ, который имѣетъ видъ:

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial y}dx\,.\,dy+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial z}dx\,.\,dz+$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,.\,\partial z}dy\,.\,dz.$$

Вынеся за скобку dx^2 и введя обозначенія:

$$\frac{dy}{dx}=p, \qquad \frac{dz}{dx}=q,$$

напишемъ тотъ же дифференціалъ въ видѣ:

$$d^2u=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}p^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}q^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial y}p+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial z}q+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,.\,\partial z}pq\right]dx^2.$$

Дифференціалъ этотъ долженъ имѣть постоянный знакъ, плюсъ — для min. и минусъ — для Max. Такъ какъ dx^2 положительно, то изслѣдованію подлежитъ только выраженіе въ скобкахъ. Введемъ еще слѣдующія обозначенія:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=B, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=C,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial y}=D, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial z}=E, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,.\,\partial z}=F$$

Дифференціалъ принимаетъ видъ:

$$d^2u=[A+Bp^2+Cq^2+2Dp+2Eq+2Fpq]dx^2.$$

Изслѣдуемый многочленъ расположимъ по степенямъ p.

$$Bp^2+2(D+Fq)p+A+2Eq+Cq^2.$$

Чтобы знакъ его не зависѣлъ отъ знака p, необходимо, чтобы:

$$(D+Fq)^2-B(A+2Eq+Cq^2)<0.$$

Но чтобы это неравенство всегда было справедливо, необходимо, чтобы знакъ лѣвой части не зависѣлъ отъ q и былъ бы всегда минусъ. Располагаемъ многочленъ лѣвой части по степенямъ q:

$$(F^2-BC)q^2+2(DF-BE)q+D^2-AB.$$

Чтобы знакъ былъ постояннымъ, должно существовать неравенство:

$$(DF-BE)^2-(F^2-BC)(D^2-AB)<0,$$

и чтобы былъ минусомъ:

$$F^2-BC<0.$$

Это два необходимыхъ условія и для Max., и для min. Кромѣ того, многочленъ, входящій въ выраженіе дифференціала, для Max. долженъ быть отрицательнымъ, для min—положительнымъ. Слѣдовательно, условіями Max. и min являются:

$$(DF-BE)^2-(F^2-BC)(D^2-AB)<0.$$

$$F^2-BC<0.$$

$$B<0(\text{Max.}) \qquad\qquad B>0(\text{min.}).$$

или:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y.\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial z}\right]^2-\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y.\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x.\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]<0 \ldots\ldots\ldots (40a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y.\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0 \ldots\ldots\ldots (40b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0(\text{Max.}) \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0(\text{min.}).$$

Въ третье условіе вмѣсто B могутъ входить A и C, такъ какъ знаки у нихъ одинаковы. Въ самомъ дѣлѣ, одинаковость знаковъ B и C слѣдуетъ прямо изъ неравенства

$$F^2-BC<0.$$

Изъ неравенства же

$$(DF-BE)^2-(F^2-BC)(D^2-AB)<0,$$

слѣдуетъ, что знаки множителей вычитаемаго одинаковы, а такъ какъ первый изъ нихъ меньше нуля, то и

$$D^2-AB<0.$$

Отсюда же слѣдуетъ, что A и B имѣютъ одинаковые знаки. Итакъ, третье условіе будетъ для Max.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0, \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}<0; \quad \ldots\ldots\ldots (40c)$$

для min.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0; \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0; \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}>0. \quad \ldots\ldots\ldots (40d)$$

Равнозначность $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ при Max. и при min. полезна и въ томъ отношеніи, что, если при данныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ вторыя частныя производныя неодинаковы по знаку, то уже можно заключить, что функція не обращается ни въ Max., ни въ min.

Чтобы второй полный дифференціалъ былъ нулемъ, нужно, чтобы обращались въ нуль многочлены:

$$Bp^2+2(D+Fq)p+A+2Eq+Cq^2$$
$$(F^2-BC)q^2+2(DF-BE)q+D^2-AB.$$

Это бываетъ, если p и q служатъ ихъ двукратными корнями, т. е. когда:

$$p=-\frac{Fq+D}{B}$$

$$q=-\frac{FD-BE}{F^2-BC}$$

Въ такомъ случаѣ изслѣдуемъ слѣдующіе дифференціалы при этихъ значеніяхъ p и q, исключивъ предварительно q изъ p.

$$p=\frac{F\frac{FD-BE}{F^2-BC}-D}{B}.$$

§ 32. Относительныя maxima и minima (функцій зависимыхъ перемѣнныхъ).

Возьмемъ функцію m перемѣнныхъ:

$$u=f(x,y,z\ldots),$$

при чемъ перемѣнныя связаны между собою слѣдующими n соотношеніями (n меньше m, иначе соотношенія были бы условны):

$$v=0$$
$$w=0$$
$$t=0$$

Чтобы найти Max. или min. данной функціи, можно опредѣлить n перемѣнныхъ изъ данныхъ n уравненій, и вставить въ функцію u, а затѣмъ уже найти Max. и min. по общему правилу. Но уравненія вообще разрѣшимы только въ немногихъ случаяхъ, и потому этотъ способъ не примѣнимъ.

Способъ, которымъ дѣйствительно пользуются для отысканія Max. и min. заключается въ слѣдующемъ.

Приравниваемъ нулю первый полный дифференціалъ (§ 29):

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\ldots=0.$$

Приращенія dx, dy, $dz\ldots$ возможны только такія, при которыхъ приращенныя перемѣнныя удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ. Подставивъ въ эти уравненія приращенныя перемѣнныя и вычтя изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій данныя, получимъ равенство нулю приращеній функцій: v, w, $t\ldots$, т. е. ихъ полныхъ дифференціаловъ:

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\ldots=0$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz+\ldots=0$$

$$dt=\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy+\frac{\partial t}{\partial z}dz+\ldots=0$$

. . . .

Положивъ соотвѣтственно эти уравненія на нѣкоторые множители λ, μ, $\nu\ldots$ и сложивъ всѣ вмѣстѣ съ уравненіемъ, лѣвой частью котораго служитъ дифференціалъ u, получимъ:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}+\ldots\right]dx+\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial w}{\partial y}+\ldots\right]dy+$$
$$+\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\lambda\frac{\partial v}{\partial z}+\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\ldots\right]dz+\ldots=0.$$

Такъ какъ множители λ, μ, $\nu\ldots$, пока произвольны, то равенство справедливо только если:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}+\nu\frac{\partial t}{\partial x}+\ldots=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial w}{\partial y}+\lambda\frac{\partial t}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\lambda\frac{\partial v}{\partial z}+\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\nu\frac{\partial t}{\partial z}=0.$$

Присоединивъ къ полученнымъ уравненіямъ n данныхъ, будемъ имѣть $m+n$ уравненій со столькими же неизвѣстными $x, y, z, \ldots$ $\lambda, \mu, \nu \ldots$ Изъ этихъ уравненій опредѣляются значенія неизвѣстныхъ, образующія функцію въ Max. или min.

§ 33. *Частный случай.* Выберемъ чаще всего встрѣчающійся случай, — когда перемѣнныя связаны только однимъ условіемъ. Пусть

$$u = f(x, y, z \ldots)$$

$$v = 0$$

Вспомогательныя уравненія будутъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Изъ нихъ легко исключается λ.

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad \lambda = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}} \qquad \lambda = -\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial v}{\partial z}}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial v}{\partial z}} \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Эта система содержитъ однимъ уравненіемъ менѣе числа неизвѣстныхъ. Присоединивъ къ ней данное уравненіе

$$v = 0,$$

получимъ опредѣленную систему.

Примѣръ. *Найти прямой круглый конусъ, имѣющій наибольшій объемъ при данной полной поверхности*

Обозначивъ радіусъ основанія черезъ x, высоту конуса — y, объемъ конуса — u, полную поверхность — πp, будемъ имѣть,

$$u = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

$$\pi p = \pi x\sqrt{x^2 + y^2} + \pi x^2$$

Первое равенство есть тождество, выражающее функцію, которую требуется обратить въ Max.; второе равенство есть уравненіе, выражающее зависимость между x и y, представимъ его въ видѣ:

$$v = x\sqrt{x^2+y^2}+x^2-p=0.$$

Находимъ частныя производныя u и v:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{3}\pi xy;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{3}\pi x^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2}+x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}+2x=\frac{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Затѣмъ примѣняемъ формулу (41):

$$\frac{\frac{2}{3}\pi xy\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{x^2+y^2}}{x\,y}.$$

По упрощеніи уравненіе это принимаетъ видъ:

$$8x^2=y^2.$$

Остается рѣшить его совмѣстно съ даннымъ. Дѣлаемъ это, вставляя въ данное уравненіе выраженіе y^2 изъ полученнаго уравненія, имѣемъ:

$$x\sqrt{x^2+8x^2}+x^2-p=0.$$

Отсюда

$$x=\frac{\sqrt{p}}{2};\quad y=\sqrt{2p}.$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

ПРИЛОЖЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ КЪ ГЕОМЕТРІИ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Касательная и нормаль плоской кривой.

§ 1. *Значеніе первой и второй производной.* Равенство

$$y=f(x)$$

изображаетъ вообще нѣкоторую плоскую кривую MM' (черт. 16). Положимъ, что координаты одной изъ ея точекъ M суть $Op=x$

и $Mp=y$. Координаты точки M' безконечно-близкой къ M суть:

$$Op'=x+\Delta x$$
$$M'p'=y+\Delta y.$$

Проводя черезъ эти точки сѣкущую SM', будемъ имѣть.

$$\operatorname{tg} MSx=\operatorname{tg} M'M\theta=\frac{M'\theta}{M\theta}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При безконечно-маломъ разстояніи MM' сѣкущая обращается въ касательную MT. Въ этомъ предположеніи получимъ:

$$\operatorname{tg} T=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=y'=f'(x) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Итакъ, *первая производная равна тангенсу угла касательной въ данной точкѣ съ осью x.*

Посмотримъ, какое значеніе имѣетъ *вторая производная*. Возьмемъ кривую, представленную на черт. 11. Для точки M первая производная, тангенсъ угла T, считаемаго отъ положительнаго направленія оси x,—отрицательна.

При дальнѣйшемъ движеніи по кривой мы дойдемъ до точки N, гдѣ производная равна нулю. Дальше производная положительна. Итакъ, первая производная возрастаетъ. Слѣдовательно, при взятомъ расположеніи кривой *вторая производная положительна*.

Возьмемъ теперь кривую, имѣющую расположеніе, какъ на черт. 12. Первая производная для точки M положительна, для N равна нулю, для M''—отрицательна, слѣдовательно убываетъ. Поэтому *вторая производная отрицательна*. Имѣемъ слѣдовательно:

	Знакъ вт. произв.	Видъ кривой.	
$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$+$		
$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$-$		$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

т. е. если вторая производная положительна, кривая обращена выпуклостію въ сторону отрицательныхъ y, если производная отрицательна, выпуклость направлена въ сторону положительныхъ значеній y.

§ 2. Уравненія и отрѣзки касательной и нормали въ случаѣ явной функціи.

Если имѣемъ кривую $\qquad y=f(x),$

то для всякой ея точки M (черт. 13) можно построить *касательную*

MT и *нормаль* MN (перпендикуляръ къ касательной). Отрѣзокъ PT называется *подкасательной*, или субтангенсомъ (*subtg*); отрѣзокъ PN называется *поднормалью*, или субнормалью (*subn*). Длиною касательной и нормали считаются MT и MN.

Такъ какъ

$$\operatorname{tg} T = \frac{dy}{dx},$$

то уравненіе касательной имѣетъ видъ

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx}(X - x). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

или

$$\frac{Y - y}{dy} = \frac{X - x}{dx}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

при чемъ X и Y обозначаютъ *текущія* координаты.

Для составленія *уравненія нормали* необходимо найти ея угловой коэффиціентъ $\operatorname{tg} N$. Онъ находится изъ извѣстнаго равенства

$$\operatorname{tg} T . \operatorname{tg} N + 1 = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dx} \operatorname{tg} N + 1 = 0;$$

отсюда

$$\operatorname{tg} N = -\frac{dx}{dy}.$$

Слѣдовательно, уравненіе нормали есть:

$$(Y - y) = -\frac{dx}{dy}(X - x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

или

$$(Y - y)dy + (X - x)dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4a)$$

Найдемъ теперь *длины* касательной, нормали, подкасательной и поднормали:

a) Изъ треугольника MPT:

$$PT = \text{subtg} = \frac{MP}{\operatorname{tg} T} = Y : \frac{dy}{dx} = Y . \frac{dx}{dy}.$$

b) Изъ треугольника MPN:

$$PN = \text{subn} = MP . \operatorname{tg} PMN = MP . \operatorname{tg} T = Y \frac{dy}{dx}.$$

c) Изъ треугольника MPT:

$$MT = \text{касат.} = \sqrt{MP^2 + TP^2} = \sqrt{Y^2 + Y^2 \frac{dx^2}{dy^2}} = Y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}.$$

d) Изъ треугольника MPN:

$$MN = \text{норм.} = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{Y^2 + Y^2 \frac{dy^2}{dx^2}} = Y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Итакъ, введя еще обозначеніе

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=ds,$$

получимъ для искомыхъ длинъ выраженія:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{касат.}=Y\frac{ds}{dy}\\
&\text{норм.}=Y\frac{ds}{dx}\\
&\text{subtg.}=Y\frac{dx}{dy}=\frac{Y}{Y'}\\
&\text{subn.}=Y\frac{dy}{dx}=Y.Y'
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

§ 3. Уравненія касательной и нормали для случая неявной функціи. Если мы имѣемъ функцію $f(x.y)=0$,
то, продифференцировавъ ее:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

получимъ для правой производной выраженіе.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Слѣдовательно. уравненіе касательной можетъ быть представлено въ одномъ изъ видовъ:

$$Y-y=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(X-x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Уравненіе (6) можно получить подстановкой въ дифференціалѣ функціи dx и dy, выраженныхъ черезъ пропорціональныя имъ $(X-x)$ и $(Y-y)$ (см. 3а)

Уравненіе нормали принимаетъ видъ

$$Y-y=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}(X-x)\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

§ 4. *Задачи.* 1) *Провести касательную изъ данной точки.* Уравненіе искомой касательной имѣетъ видъ:

$$Y-y=f'(x)(X-x).$$

Ему удовлетворяютъ координаты данной точки (a,b)

$$b-y=f'(x)(a-x).$$

Такъ какъ точка прикосновенія (x, y) лежитъ на кривой имѣемъ кромѣ того: $$y=f(x).$$

Рѣшивъ совмѣстно два послѣднія уравненія (для чего всего удобнѣе вставить y изъ второго уравненія въ первое), найдемъ координаты точки прикосновенія, а затѣмъ и уравненія касательной по (3) или (3a).

2) Провести касательную параллельно данной прямой. Такъ какъ дается направленіе искомой касательной, то извѣстно $f'(x)$. Присоединивъ уравненіе $$y=f(x).$$
найдемъ точку касанія (x, y).

§ 5. *Примѣры.* 1) *Эллипсъ.* Уравненіе эллипса есть

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

продифференцировавъ его, получимъ:

$$2a^2ydy+2b^2xdx=0,$$

откуда $$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Уравненіе касательной къ эллипсу въ точкѣ (x, y) есть:

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x),$$

или по упрощеніи:

$$a^2yY+b^2xX=a^2b^2.$$

То же уравненіе можно получить изъ дифференціала уравненія кривой, вставивъ въ него вмѣсто dx, dy пропорціональныя имъ количества $X-x$, $Y-y$. Такимъ образомъ получимъ:

$$a^2y(Y-y)+b^2x(X-x)=0,$$

или $$a^2yY+b^2xX=a^2b^2.$$

Посмотримъ теперь, какова кривизна эллипса. Для этого находимъ вторую производную дифференцируя первую:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^2yb^2-b^2xa^2\frac{dy}{dx}}{a^4y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+\frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2}=$$

$$=-\frac{b^2}{a_2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}$$

Числитель упрощается еще при помощи уравненія эллипса.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^4y^3}a^2b^2 = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Полученное выраженіе второй производной показываетъ, что знакъ ея обратенъ знаку y.

Слѣдовательно, при положительныхъ значеніяхъ y вторая производная отрицательна, т. е. кривая имѣетъ видъ при отрицательномъ Y кривая расположена такъ $\smile$, это согласно съ истиной.

2) *Парабола.* Дифференцируя уравненіе параболы $y^2 = 2px$, получимъ:

$$2ydy = 2pdx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Уравненіе касательной есть:

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x),$$

или

$$yY = pX + px.$$

Вторая производная будетъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p\,.dy}{y^2dx} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Слѣдовательно, кривизна параболы распредѣляется такъ же, какъ и въ эллипсѣ.

Найдемъ длину субнормали параболы PN:

$$PN = \text{subn.} = PM.\operatorname{tg}T = Y\frac{dy}{dx} = Y\frac{p}{y} = p. —$$

результатъ, какого и слѣдовало ожидать.

3) *Логариѳмическая кривая.* Эта кривая изображается уравненіемъ:

$$y = lx.$$

Такъ какъ

$$\text{при } x = 0, \quad y = -\infty,$$

$$\text{при } x \gtreqless 1, \quad y \gtreqless 0,$$

то кривая имѣетъ приблизительно форму, представленную на черт. 16.

Производная данной функціи имѣетъ видъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Вторая производная есть:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Такъ какъ x^2 всегда положительно, то кривая вездѣ имѣетъ видъ кривизны ⌒.

Другая логариѳмическая кривая представляется уравненіемъ:

$$y=a^x.$$

4) *Циклоида. Циклоида есть кривая, образуемая точкой круга, катящагося по прямой линіи.* Кругъ этотъ называется *образующимъ*.

Выведемъ уравненіе циклоиды. Положимъ, что образующій кругъ радіуса R катится по оси X (черт. 17) и мы слѣдимъ за точкой его окружности, прошедшей черезъ O. Возьмемъ другое положеніе круга C: точка, бывшая прежде въ O, попадетъ въ M. Соединивъ точку M съ центромъ C, проведя $MQ \perp CD$ и обозначивъ уголъ MCQ черезъ ω, будемъ имѣть:

$$MQ=CM\operatorname{Sin}\omega=R\operatorname{Sin}\omega$$

$$CQ=CM\operatorname{Cos}\omega=R\operatorname{Cos}\omega.$$

$$OD=MD=R\omega.$$

Выражаемъ теперь координаты точки M:

$$OP=X=OD-PD=R\omega-R\operatorname{Sin}\omega=R(\omega-\operatorname{Sin}\omega)$$

$$MP=Y=CD-CQ=R-R\operatorname{Cos}\omega=R(1-\operatorname{Cos}\omega).$$

Выраженія

$$\left.\begin{aligned}X&=R(\omega-\operatorname{Sin}\omega)\\ Y&=R(1-\operatorname{Cos}\omega)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

можно считать за уравненія циклоиды съ добавочнымъ перемѣннымъ ω. Чтобы получить уравненіе въ обычномъ видѣ, необходимо исключить ω. Для этого выражаемъ $\operatorname{Cos}\omega$ изъ второго уравненія:

$$\operatorname{Cos}\omega=\frac{R-y}{R}$$

и выражаемъ синусъ черезъ косинусъ:

$$\operatorname{Sin}\omega=\sqrt{1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2}=\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{R}$$

Замѣтивъ, что

$$\omega=\operatorname{arc}\operatorname{Cos}\frac{R-y}{R},$$

вставляемъ ω и $\operatorname{Sin}\omega$ въ первое уравненіе:

$$X=R\left(\operatorname{arc}.\operatorname{Cos}\frac{R-y}{R}-\sqrt{2Ry-y^2}\right)\ldots\ldots\ldots(8')$$

Уравненіе это обычнаго вида, показываетъ, что кривая трансцендентная. Оно показываетъ также, что кривая—періодическая, такъ какъ уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{R-y}{R}=\operatorname{Cos}\left(\frac{X}{R}+\sqrt{2Ry-y^2}\right).$$

Чтобы получить производную $\frac{dy}{dx}$, дифференцируемъ уравненія (8) по ω:

$$dx = R(1-\mathrm{Cos}\,\omega)d\omega$$
$$dy = R\mathrm{Sin}\,\omega d\omega.$$

Отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{R\mathrm{Sin}\,\omega}{R(1-\mathrm{Cos}\,\omega)} = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}.$

Найдемъ длину субнормали PN:

$$PN = \mathrm{Subn} = PM\mathrm{tg}T = y\frac{dy}{dx} = y\sqrt{\frac{2R}{y} - 1} = \sqrt{y(2R - y)}$$
$$= \sqrt{QD.\,QG} = MQ = PD$$

Итакъ, *нормаль* MN проходитъ черезъ точку опоры круга. Эта точка опоры дѣлается какъ бы мгновеннымъ центромъ окружности, съ которою совпадаетъ элементъ M циклоиды. Это свойство циклоиды было извѣстно еще Евклиду.

§ 6. *Полярныя координаты. Уголъ касательной съ полярной осью.* Посмотримъ систему Декартовыхъ координатъ, принявъ полярную ось за ось X полюсъ O за начало (черт. 18). Въ этомъ случаѣ тангенсъ угла касательной съ осью равенъ $\frac{dy}{dx}$. Остается только выразить $\frac{dy}{dx}$ черезъ полярныя координаты ρ и φ, т. е. совершить преобразованіе координатъ.

Имѣемъ:

$$x = r\mathrm{Cos}\varphi$$
$$y = r\mathrm{Sin}\varphi.$$

Дифференцируемъ эти выраженія:

$$dx = \mathrm{Cos}\varphi d\rho - \rho\mathrm{Sin}\varphi.d\varphi$$
$$dy = \mathrm{Sin}\varphi d\rho + \rho\mathrm{Cos}\varphi d\varphi.$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}T = \frac{\mathrm{Sin}\varphi.d\rho + \rho\mathrm{Cos}\varphi d\varphi}{\mathrm{Cos}\varphi d\rho - \rho\mathrm{Sin}\varphi d\varphi} = \frac{\mathrm{Sin}\frac{d\rho}{d\varphi} + \rho\mathrm{Cos}\varphi}{\mathrm{Cos}\varphi.\frac{d\rho}{d\varphi} - \rho\mathrm{Sin}\varphi}.$$

§ 7. *Уголъ касательной съ радіусомъ-векторомъ.* Весьма важную роль играетъ уголъ Θ касательной съ радіусомъ-векторомъ. Опредѣляемъ его изъ треугольника OMT

$$\theta = T - \varphi.$$

Имѣемъ.
$$\operatorname{tg}T=\frac{dy}{dx}$$
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}$$

Слѣдовательно:
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{tg}T-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}T.\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}}{1+\frac{dy}{dx}\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}}=\frac{\operatorname{Cos}\varphi.dy-\operatorname{Sin}\varphi.dx}{\operatorname{Cos}\varphi.dx+\operatorname{Sin}\varphi.dy}.$$

Вставляемъ dx и dy:
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Sin}\varphi.dr+r\operatorname{Cos}\varphi d\varphi)-\operatorname{Sin}\varphi(\operatorname{Cos}\varphi.dr-r\operatorname{Sin}\varphi d\varphi)}{\operatorname{Cos}\varphi(\operatorname{Cos}\varphi dr-r\operatorname{Sin}\varphi.d\varphi)+\operatorname{Sin}\varphi(\operatorname{Sin}\varphi.dr+r\operatorname{Cos}\varphi.d\varphi)}=$$
$$=\frac{r(\operatorname{Cos}^2\varphi+\operatorname{Sin}^2\varphi)d\varphi}{(\operatorname{Cos}^2\varphi+\operatorname{Sin}^2\varphi)dr}=r\frac{d\varphi}{dr}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

То же выраженіе можно получить иначе: замѣтивъ, что
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x},$$
напишемъ:
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{dy}{dx}\frac{y}{x}}=\frac{xdy-ydx}{xdx+ydy}.$$

Дифференцируя выраженіе:
$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$
получимъ:
$$d\varphi=\frac{d\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{xdy-ydx}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

Отсюда: $\quad xdy-ydx=(x^2+y^2)d\varphi=r^2d\varphi.$

Такъ какъ, дифференцируя выраженіе: $x^2+y^2=r^2$, получаемъ:
$$xdx+ydy=rdr,$$
то, замѣнивъ согласно полученному числитель и знаменатель, будемъ имѣть:
$$tg\theta=\frac{xdy-ydx}{xdx+ydy}=\frac{r^2d\varphi}{rdr}=r\frac{d\varphi}{dr}.$$

§ 8. *Отрѣзки.* Если кривая дана по полярнымъ координатамъ, ось которыхъ—Ox и полюсъ O (черт. 19), то длинной касательной считается отрѣзокъ ея MS отъ точки касанія до встрѣчи съ перпендикуляромъ къ радіусу вектору OM; длиной *нормали* считается MN, т. е. отрѣзокъ до того же перпендикуляра; *подкасательной* считается OS и *поднормалью* ON.

Найдемъ длины всѣхъ этихъ отрѣзковъ:

Изъ треугольниковъ MOS и MON:

$$OS = \text{subt} = OM tg SMO = r tg\theta = r^2 \frac{d\varphi}{dr}$$

$$ON = \text{subn} = \frac{OM}{tg NMO} = \frac{r}{tg\Theta} = \frac{dr}{d\varphi} \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$MS = \text{касат.} = \sqrt{\overline{OS}^2 + \overline{OM}^2} = \sqrt{r^4\frac{d\varphi^2}{dr^2} + r^2} = r\frac{\sqrt{r^2d\varphi^2 + dr^2}}{dr} \ldots\ldots (11)$$

$$MN = \text{норм.} = \sqrt{\overline{ON}^2 + \overline{OM}^2} = \sqrt{\frac{dr^2}{d\varphi^2} + r^2} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2d\varphi^2}}{d\varphi} \ldots\ldots\ldots (12)$$

§ 9. ***Примѣры.*** *1) Архимедова спираль.* Эта кривая выражается уравненіемъ:

$$r = a\varphi.$$

Давая φ значенія:

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$$

Мы получимъ для r:

$$0, a\frac{\pi}{2}, a\pi, a\frac{3\pi}{2}, a2\pi, \ldots\ldots$$

т. е. при вращеніи радіуса вектора онъ увеличивается съ каждой четвертью оборота на нѣкоторое постоянное количество. Кривая имѣетъ формулу, представленную на черт. 20. Чтобы найти уголъ радіуса—вектора r съ касательной, дифференцируемъ уравненіе кривой: $dr = ad\varphi.$

Слѣдовательно:

$$tg\theta = r\frac{d\varphi}{dz} = \frac{rd\varphi}{ad\varphi} = \frac{r}{a}.$$

Такъ какъ r есть величина существенно-положительная, то $tg\theta$ всегда положителенъ; поэтому уголъ θ для *Архимедовой спирали всегда острый.* При $r = \infty$ $tg\theta = \infty$

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

т. е, въ предѣлѣ, *при безконечно-большомъ r уголъ θ стремится къ прямому.*

2) Логариѳмическая спираль. Эта кривая изображается уравненіемъ:

$$r=a^{\varphi}$$

Выписываемъ нѣкоторыя значенія φ и соотвѣтствующія имъ значенія r:

$$\varphi=0 \qquad r=1$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \qquad r=a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\varphi=\pi \qquad r=a^{\pi}$$

$$\varphi=\frac{3\pi}{2} \qquad r=a^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\varphi=2\pi \qquad r=a^{2\pi}.$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

Характеръ измѣненій радіуса вектора указываетъ приблизительную форму кривой (черт. 21). Аргументъ можетъ получать и отрицательныя значенія:

$$\varphi=-\frac{\pi}{2} \qquad r=a^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\varphi=-\infty \qquad r=a^{-\infty}=0.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что радіусъ-векторъ лишь въ предѣлѣ дѣлается безконечно малымъ, т. е. *логариѳмическая спираль асимптотически приближается къ центру.*

Для нахожденія угла Θ, дифференцируемъ уравненіе спирали:

$$dr=a^{\varphi}la\,d\varphi$$

Слѣдовательно:

$$\operatorname{tg}\Theta=r\frac{d\varphi}{dr}=\frac{r\,d\varphi}{a^{\varphi}la\,d\varphi}=\frac{1}{la}=\mathrm{Const.}$$

Итакъ, *уголъ касательной и логариѳмической спирали съ радіусомъ-векторомъ имѣетъ постоянную величину.*

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Касательная прямая и нормальная плоскость кривой въ пространствѣ.

§ 10. Касательная линія для случая явныхъ функцій. Кривая линія, какъ извѣстно, опредѣляется въ пространствѣ двумя уравненіями, положимъ, уравненіями:

$$x=f(z), \qquad y=F(z)$$

Возьмемъ на этой кривой (черт. 22) двѣ точки: $M(x, y, z)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Проводя черезъ эти точки сѣкущую SM, замѣтимъ, что проекціи отрѣзки MM' на оси координатъ суть $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Такъ какъ длина отрѣзка выражается корнемъ изъ суммы квадратовъ въ его проекцій, то:

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Положенія сѣкущей опредѣлятся слѣдующимъ образомъ:

$$\operatorname{Cos}(s, x) = \frac{\Delta x}{MM'} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

$$\operatorname{Cos}(s, y) = \frac{\Delta y}{MM'} = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

$$\operatorname{Cos}(s, z) = \frac{\Delta z}{MM'} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

Уравненіе ея есть:

$$\frac{X - x}{\operatorname{Cos}(s, x)} = \frac{Y - y}{\operatorname{Cos}(s, y)} = \frac{Z - z}{\operatorname{Cos}(s, z)}$$

или

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z}$$

Чтобы перейти къ касательной, преобразуемъ выраженіе косинусовъ угловъ сѣкущей съ осями, дѣля числитель и знаменатель на Δz.

$$\operatorname{Cos}(s, x) = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta z}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Cos}(s, y) = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta z}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Cos}(s, z) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)^2 + 1}}$$

Предѣльныя значенія этихъ косинусовъ будутъ косинусы угловъ касательной (T,X), (T,Y), (T,Z), именно:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos}(T,X) &= \frac{\dfrac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2+1}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \\
\operatorname{Cos}(T,Y) &= \frac{\dfrac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2+1}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \qquad (13) \\
\operatorname{Cos}(T,Z) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2+1}} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.
\end{aligned}$$

Принято обозначать:

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2;$$

При такомъ обозначеніи нашъ результатъ перепишется въ видѣ:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos}(T,X) &= \frac{dx}{ds} \\
\operatorname{Cos}(T,Y) &= \frac{dy}{ds} \qquad \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \qquad (13a) \\
\operatorname{Cos}(T,Z) &= \frac{dz}{ds}
\end{aligned}$$

Система уравненій касательной, какъ предѣлъ уравненій сѣкущей имѣетъ видъ.

$$\frac{X-x}{\operatorname{Cos}(T,x)}=\frac{Y-y}{\operatorname{Cos}(T,y)}=\frac{Z-z}{\operatorname{Cos}(T,z)},$$

или, по подстановкѣ (13a):

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (14)$$

§ 11. *Нормальная плоскость въ случаѣ явныхъ функцій.* Нормальною плоскостью называется плоскость, перпендикулярная къ касательной въ точкѣ касанія. Уравненіе всякой плоскости, проходящей черезъ точку (x, y, z) имѣетъ видъ:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Чтобы эта плоскость была перпендикулярна направленію, характеризуемому косинусами $\cos(T, x)$, $\cos(T, y)$, $\cos(T, z)$ необходимо

$$\frac{A}{\cos(T,X)} = \frac{B}{\cos(T,Y)} = \frac{C}{\cos(T,Z)}.$$

Но по (13а) косинусы пропорціональны dx, dy, dz и потому могутъ быть замѣнены этими дифференціалами

$$\frac{A}{dx} = \frac{B}{dy} = \frac{C}{dz}.$$

Послѣдняя система показываетъ, что dx, dy, dz пропорціональны A, B, C. Замѣнивъ дифференціалами коэффиціенты A, B, C въ уравненія плоскости, получимъ уравненіе нормальной плоскости въ видѣ:

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0. \tag{15}$$

§ 12. *Касательная линія въ случаѣ неявныхъ функцій.* Кривыя даны уравненіями: $u=0$, $v=0$,

гдѣ $u, v = f(x, y, z)$.

Дифференцируемъ оба уравненія:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0.$$

Исключаемъ изъ нихъ dz, положивъ первое на $\frac{\partial v}{\partial z}$, а второе на $\frac{\partial u}{\partial z}$ и сложивъ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)dy=0$$

Отсюда:

$$\frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Если изъ дифференціаловъ исключить dx или dy, полученное равенство пополнится еще однимъ членомъ

$$\frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}}=\frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}};$$

обозначимъ знаменатели черезъ L, M, N представимъ эту систему въ видѣ.

$$\frac{dx}{L}=\frac{dy}{M}=\frac{dz}{N}.$$

По параграфу 10 (форм. 14) dx, dy, dz пропорціональны $(X-x)$, $(Y-y)$, $(Z-z)$; слѣдовательно:

$$\frac{X-x}{L}=\frac{Y-y}{M}=\frac{Z-z}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Это и есть система уравненій касательной для случая неявныхъ функцій. Углы касательной съ осями найдутся изъ равенствъ:

$$\cos(T,X)=\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$
$$\cos(T,Y)=\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$
$$\cos(T,Z)=\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

Уравненія касательной линіи можемъ получать и иначе, въ нѣсколько другомъ видѣ. Въ дифференціалы u и v вставимъ вмѣсто dx, dy, dz пропорціональныя имъ $(X-x)$, $(Y-y)$, $(Z-z)$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0,\\ \frac{\partial v}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial v}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial v}{\partial z}(Z-z)=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Эти и будутъ уравненія касательной, такъ какъ сдѣланная подстановка возможна только для касательной.

§ 13. Нормальная плоскость для случая неявныхъ функцій. Уравненіе нормальной плоскости для случая неявныхъ функцій получимъ, вставивъ въ уравненіе (15) вмѣсто dx, dy, dz пропорціональныя имъ L, M, N:

$$L(X-x)+M(Y-y)+N(Z-z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Касательная плоскость и нормальная прямая въ точкѣ поверхности.

§ 14. Касательная плоскость. Положимъ, что имѣемъ поверхность: $u=0$. Пусть черезъ точку ея (x, y, z) проходитъ линія:

$$u=0, \quad v=0.$$

Касательная къ этой линіи опредѣляется системой (18) и лежитъ, слѣдовательно, въ плоскости:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(Z-z)=0. \tag{19}$$

Но эта плоскость не зависитъ отъ поверхности v, т. е. не мѣняется при измѣненіи v, поэтому въ ней лежатъ касательныя линіи ко *всѣмъ* кривымъ, лежащимъ на поверхности u и проходящихъ черезъ точку (x, y, z). Такая плоскость и называется *касательной.*

Уравненіе (19) впервые было получено *Иваномъ Бернулли.*

§ 15. Нормальная прямая. Косинусы угловъ нормали MN съ осями координатъ найдемъ, раздѣливъ коэффиціенты уравненія касательной плоскости на корень изъ суммы квадратовъ коэффиціентовъ (знаменатель нормирующаго множителя).

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{Cos}(N,x)&=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}=\operatorname{Cos}(T,yz)\\
\operatorname{Cos}(N,y)&=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}=\operatorname{Cos}(T,xz)\\
\operatorname{Cos}(N,z)&=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}=\operatorname{Cos}(T,yz)
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Слѣдовательно, уравненіе нормали имѣетъ видъ.

$$\frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial u}{\partial z}}. \tag{21}$$

§ 16. *Частный случай.* Положимъ, что уравненіе поверхности рѣшено относительно z т. е. имѣетъ видъ:

$$z=f(x,y)$$

Чтобы можно было примѣнять наши формулы, переносимъ все въ лѣвую часть и обозначаемъ $z-f(x,y)$ черезъ u.

Продифференцировавъ данное уравненіе по x и y, получимъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=p$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=q$$

Дифференцированіе u даетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}=-p$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}=-q \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=1.$$

Примѣняя формулу (19), получимъ уравненіе касательной плоскости:

$$-p(X-x)-q(Y-y)+(Z-z)=0.$$

или

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (22)$$

Косинусы угловъ нормали получаютъ значенія:

$$\text{Cos}(N,x)=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\text{Cos}(N,y)=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (23)$$

$$\text{Cos}(N,z)=\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

и уравненіе нормали приводится къ виду

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (24)$$

или

$$(X-x)+p(Z-z)=0,$$

$$(Y-y)+q(Z-z)=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (25)$$

§ 17. *Примѣръ.* Положимъ, что дана сфера уравненіемъ:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Уравненіе касательной есть:

$$x(X-x)+y(Y-y)+z(Z-z)=0.$$

или, по раскрытіи скобокъ и послѣ замѣны $x^2+y^2+z^2$ черезъ r^2:

$$xX+yY+zZ=r^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (26)$$

Уравненіе нормали есть:

$$\frac{X-x}{x}=\frac{Y-y}{y}=\frac{Z-z}{z},$$

или

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z},$$

иначе

$$xY-yX=0$$
$$zX-xZ=0.$$

Очевидно, что нормаль проходитъ черезъ начало, т. е. черезъ центръ шара.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Кривизна плоской кривой.

Вопросъ о кривизнѣ линіи впервые былъ поставленъ *Лейбницемъ* въ 1686 г., т. е. черезъ два года послѣ открытія дифференціальнаго исчисленія.

§ 18. Лемма. Квадратъ дифференціала дуги равенъ суммѣ квадратовъ дифференціаловъ координатъ т. е. на плоскости

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

Доказательство. Возьмемъ точки кривой $M(x,y)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta x)$ (черт. 24). Если MN есть касательная въ M, то

$$NQ=MQ\,tg\,T=\Delta x\frac{dy}{dx}.$$

Такъ какъ дуга больше прямой, соединяющей ея концы и меньше внѣшней ломаной, то.

$$\overset{\frown}{MM'}>\overline{MM'}$$
$$\overset{\frown}{MM'}<MN+NM'.$$

MM' есть приращеніе дуги ΔS слѣдовательно

$$\Delta S>\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$
$$\Delta S<\sqrt{\Delta x^2+\Delta x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\left(\Delta x\frac{dy}{dx}-\Delta y\right).$$

Отсюда:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}>\sqrt{1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$
$$\frac{\Delta s}{\Delta x}<\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+\frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Перейдя къ предѣлу, будемъ имѣть:

$$\frac{ds}{dx} \geqq \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\frac{ds}{dx} \leqq \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

Отсюда:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Изъ (27) получимъ:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+y'^2};\quad ds = \sqrt{1+y'^2}.dx.$$

S въ предѣлахъ a и b равно.

$$S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}.dx.$$

§ 19. *Теорія соприкосновенія.* Положимъ, что даны двѣ кривыя (черт. 25).

$$y = F(x);\qquad y = f(x).$$

Кривыя эти пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ $M(a, b)$, такъ что $b = F(a)$, $b = f(a)$.

Взявъ на обѣихъ кривыхъ по точкѣ N, N' съ обсциссой $(a+h)$, получимъ:

$$NP' = F(a+h),\quad N'P' = f(a+h)$$

и слѣдовательно:

$$NN' = NP' - N'P' = F(a+h) - f(a+h).$$

Разложимъ выраженіе NP' и $N'P'$ по теоремѣ Тейлора.

$$NP' = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{1.2}F''(a) + \dots$$

$$N'P' = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \dots$$

Тогда:

$$NN' = F(a) - f(a) + h\big[F'(a) - f'(a)\big] + \frac{h^2}{1.2}\big[F''(a) - f''(a)\big] + \dots$$

Разсмотримъ слѣдующіе случаи

1) $F(a) = f(a)$. Въ этомъ случаѣ отрѣзокъ NN' есть безконечно-малая перваго порядка, кривыя *пересѣкаются*. Назовемъ этотъ случай случаемъ *соприкосновенія нулевого порядка.*

2) $F(a)=f(a)$ и кромѣ того $F'(a)=f'(a)$.

Отрѣзокъ NN есть уже безконечно-малая второго порядка. Равенство производныхъ показываетъ, что кривыя имѣютъ во взятой точкѣ общую касательную. Онѣ имѣютъ *соприкосновеніе перваго порядка* (черт. 26).

3) $F(a)=f(a)$, $F'(a)=f'(a)$, $F''(a)=f''(a)$.

NN есть безконечно-малая третьяго порядка. Кривыя имѣютъ относительное расположеніе, представленное на черт. 27. Такое расположеніе называется *соприкосновеніемъ второго порядка*.

Вообще, *если функціи и всѣ ихъ производныя до n-ой включительно дѣлаются равными, кривыя имѣютъ соприкосновеніе n-го порядка*, а отрѣзокъ NN' есть безконечно-малая $(n+1)$-го порядка.

Частный случай. Соприкосновеніе съ прямою. Прямая можетъ имѣть въ произвольной точкѣ кривой соприкосновенія только перваго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, прямая опредѣляется двумя параметрами: для опредѣленія этихъ параметровъ находились два условія, которыми служатъ равенство функцій и равенство первыхъ производныхъ, т. е. условія соприкосновенія перваго порядка.

Положимъ, что дана кривая:

$$y=f(x)$$

и прямая

$$y=\alpha x+\beta;$$

которыя имѣютъ общую точку (a, b), такъ, что:

$$b=f(a); \qquad b=\alpha a+\beta.$$

Продифференцировавъ уравненіе прямой и вставивъ $x=a$, получимъ:

$$\alpha=f'(a).$$

Изъ предыдущаго уровня опредѣлнемъ:

$$\beta=b-af'(a).$$

Вставивъ эти значенія α и β въ уравненіе прямой, будемъ имѣть

$$y=f'(a)x+b-af'(a),$$

или

$$y-b=f'(a)(x-a),$$

т. е. уравненіе касательной въ данной точкѣ (a, b), какъ и должно было получиться.

Въ *особыхъ* точкахъ, кривая можетъ имѣть съ прямою соприкосновенія и высшихъ порядковъ.

§ 20. Центръ и радіусъ кривизны въ Декартовыхъ координатахъ.

Опредѣленія. Кругъ, имѣющій съ данною кривою соприкосновеніе второго порядка, называется *кругомъ кривизны*. Радіусъ его и центръ называются *радіусомъ и центромъ кривизны*.

Пусть уравненіе круга кривизны есть:

$$(x-a)^2+(y+\beta)^2=\rho^2$$

Дифференцируемъ его два раза:

$$(x-\alpha)dx+(y-\beta)dy=0$$

$$dx^2+dy^2+(y-\beta)d^2y=0.$$

Второй дифференціалъ представляется еще такъ:

$$ds^2+(y-\beta)d^2y=0:$$

отсюда:

$$y-\beta=-\frac{ds^2}{d^2y}.$$

Изъ перваго дифференціала найдемъ:

$$x-\alpha=-\frac{dy}{dx}(y-\beta)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{ds^2}{d^2y}.$$

Изъ двухъ послѣднихъ выраженій опредѣляются координаты центра кривизны.

Чтобы найти радіусъ кривизны, вставляемъ значенія $(x-\alpha)$ и $(y-\beta)$ въ уравненіе круга

$$\rho^2=\frac{dy^2}{dx^2}\cdot\frac{ds^4}{d^2y^2}+\frac{ds^4}{d^2y^2}=\frac{ds^4}{d^2y^2}\cdot\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}=\frac{ds^6}{dx^2d^2y^2}.$$

Отсюда:

$$\rho=\pm\frac{ds^3}{dx.d^2y}=\left(\frac{ds^3}{dx.d^2y}\right) \qquad (28)$$

Скобками обозначаемъ, что берется абсолютно величина радіуса, такъ какъ онъ считается существенно положительнымъ.

Та же формула (28) послѣ незначительныхъ преобразованій приводится къ слѣдующимъ видамъ:

$$\rho=\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx.d^2y} \qquad (28')$$

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (28'')$$

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \qquad (28''')$$

Кругъ кривизны для особыхъ точекъ при оси можетъ имѣть соприкосновеніе съ нею выше втораго порядка.

Формулы (28), (28'), (28''), (28''') выражаетъ радіусъ кривизны въ случаѣ, если главнымъ перемѣннымъ считается x. Для перехода къ случаю, когда x и y *зависимыя перемѣнныя* всего удобнѣе воспользоваться формулой (28''). Находимъ ея знаменатель, считая x и y за зависимыя перемѣнныя:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}$$

Слѣдовательно:

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}dx^3}{dxd^2y-dyd^2x}=\frac{[dx^2+dy^2]^{3/2}}{dxd^2y-dyd^2x}\ \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Если главнымъ перемѣннымъ считать y, то $d^2y=0$ и

$$\rho=-\frac{ds^3}{dyd^2x}$$

Положивъ $d^2x=0$, т. е. считая главнымъ перемѣннымъ x, вернемся къ выраженіямъ (28).

§ 21. *Уголъ смежности.* Очевидно, что *нормаль въ каждой точкѣ проходитъ черезъ центръ кривизны.* Уголъ между двумя сосѣдними нормами (имѣющими, слѣдовательно, пересѣченіе въ общемъ для обѣихъ точекъ центрѣ кривизны), называется *угломъ смежности* и обозначается $d\omega$. Такъ какъ дуга кривой между двумя смежными точками можетъ быть принята за дугу окружности, то

$$\rho d\omega=ds,$$

откуда:

$$d\omega=\frac{ds}{\rho}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\rho}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\rho^2}dx$$

$$\omega=\int\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\rho}dx$$

§ 22. *Выраженіе радіуса кривизны въ полярныхъ координатахъ.* Для перехода къ полярнымъ координатамъ дифференцируемъ формулы преобразованія координатъ:

$$x=r\operatorname{Cos}\varphi,\quad y=r\operatorname{Sin}\varphi.$$

получимъ:

$$dx=\operatorname{Cos}\varphi dr-r\operatorname{Sin}\varphi d\varphi.$$

$$dy=\operatorname{Sin}\varphi dr+r\operatorname{Cos}\varphi d\varphi.$$

Второе дифференцированіе даетъ:

$$d^2x=\operatorname{Cos}\varphi d^2r-\operatorname{Sin}\varphi drd\varphi-\operatorname{Sin}\varphi drd\varphi-r\operatorname{Cos}\varphi d\varphi^2=$$

$$=\operatorname{Cos}\varphi d^2r-2\operatorname{Sin}\varphi drd\varphi-r\operatorname{Cos}\varphi d\varphi^2$$

$$d^2y=\operatorname{Sin}\varphi d^2r+2\operatorname{Cos}\varphi drd\varphi-r\operatorname{Sin}\varphi d\varphi^2.$$

Вставивъ полученные дифференціалы въ формулу (29), по раскрытіи скобокъ и по приведеніи подобныхъ членовъ, получимъ:

$$\rho=\frac{(dr^2+r^2d\varphi^2)^{3/2}}{2dr^2d\varphi-rd^2rd\varphi+r^2d\varphi^3}\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

§ 23 Нахожденіе радіуса кривизны способомъ безконечно-малыхъ. Проведемъ нормали въ двухъ смежныхъ точкахъ кривой M и M' (черт. 28). Нормали эти пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ C, отстоящей отъ M на разстояніи r. Очевидно, что:

$$r=\rho+\varepsilon,$$

такъ что

$$\lim r=\rho.$$

Соединивъ M съ M' прямою линіей, получимъ треугольникъ, однимъ изъ угловъ котораго служитъ уголъ смежности $\Delta\tau=\angle MCM'$, другіе углы имѣютъ предѣломъ $\frac{\pi}{2}$, напримѣръ:

$$MM'C=\frac{\pi}{2}-\eta;$$

сторона MM' равна, очевидно, $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Построенный треугольникъ даетъ соотношеніе:

$$\frac{MC}{\operatorname{Sin} MM'C}=\frac{MM'}{\operatorname{Sin} MCM'},$$

или по подстановкѣ соотвѣтственныхъ значеній.

$$\frac{\rho+\varepsilon}{\operatorname{Cos}\eta}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\operatorname{Sin}\Delta\tau}.$$

Раздѣлимъ числитель и знаменатель правой части на Δx.

$$\frac{\rho+\varepsilon}{\operatorname{Cos}\eta}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}{\frac{\operatorname{Sin}\Delta\tau}{\Delta x}}$$

и перейдемъ къ предѣлу, замѣтивъ, что

$$\lim\frac{\operatorname{Sin}\Delta\tau}{\Delta x}=\lim\left[\frac{\operatorname{Sin}\Delta\tau}{\Delta\tau}\cdot\frac{\Delta\tau}{\Delta x}\right]=\frac{d\tau}{dx},$$

получимъ:

$$\rho=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d\tau}{dx}}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{d\tau}.$$

Такъ какъ уголъ смежности $\Delta\tau$ равенъ приращенію ΔT, угла

касательной съ осью x (по перпендикулярности сторонъ), то для нахожденія его дифференціала, дифференцируемъ выраженіе угла T.

$$\operatorname{tg} T = \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad T = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}.$$

Получится:

$$d\tau = dT = \frac{d\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d^2y \cdot dx}{dx^2 + dy^2}.$$

Вставивъ это выраженіе, придемъ къ извѣстной уже намъ формулѣ.

$$\rho = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}(dx^2+dy^2)}{dx \cdot d^2y} = \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx \cdot d^2y}$$

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Развертки плоскихъ кривыхъ.

§ 24. Понятіе о разверткѣ. Разверткою (или эволютой) называется геометрическое мѣсто центровъ кривизны.

Для опредѣленія координатъ центра кривизны, мы имѣли (§ 20) равенства:

$$x - \alpha = \frac{ds^2}{d^2y} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad y - \beta = -\frac{ds^2}{d^2y};$$

отсюда:

$$\alpha = x - \frac{ds^2}{d^2y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\beta = y + \frac{ds^2}{d^2y}.$$

Уравненіе развертки (съ текущими координатами R. β) получимъ, присоединивъ къ написаннымъ равенствамъ уравненіе кривой $f(x,y)=0$ и исключивъ x и y. Итакъ, уравненіе развертки есть результатъ исключенія x и y изъ системы:

$$\alpha = x - \frac{ds^2}{d^2y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\beta = y + \frac{ds^2}{d^2y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

$$f(x, y) = 0.$$

§ 25. Свойство первое.

Касательная къ кривой и къ ея разверткѣ взаимно перпендику-

лярны. Напишемъ уравненіе круга кривизны и его первые два дифференціала (§ 20):

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$
$$(x-\alpha)dx+(y-\beta)dy=0$$
$$ds^2+(y-\beta)d^2y=0.$$

Продифференцируемъ уравненіе круга, считая перемѣнными x, y, R, β, ρ:

$$(x-\alpha)(dx-d\alpha)+(y-\beta)(dy-d\beta)=\rho d\rho,$$

и вычтемъ изъ этого дифференціала дифференціалъ по x и y; получимъ равенство

$$-(x-\alpha)d\alpha-(y-\beta)d\beta=\rho d\rho,$$

откуда $$d\rho=-\frac{x-\alpha}{\rho}dx-\frac{y-\beta}{\rho}dy. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Продифференцируемъ по x, y, α и β первый дифференціалъ по x и y.

$$(dx-d\alpha)dx+(dy-d\beta)dy+(y-\beta)d^2y=0.$$

Вычтя изъ этого выраженія второй дифференціалъ по x и y, получимъ $$-d\alpha.dx-d\beta.dy=0,$$

или, что то же $$1+\frac{d\beta}{d\alpha}.\frac{dy}{dx}=0. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32a)$$

$\frac{dy}{dx}$ представляетъ тангенсъ угла касательной къ кривой съ осью x, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ есть подобная же функція для развертки, такъ какъ α и β служитъ ся текущими координатами. Условіе (32a) выражаетъ перпендикулярность обѣихъ касательныхъ, т. е. то, что мы хотѣли доказать Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что *развертка касается всѣхъ нормалей кривой* (черт. 29).

§ 26. Свойство второе. Дифференціалъ дуги развертки равенъ дифференціалу радіуса кривизны кривой.

Для опредѣленія положенія центра кривизны мы имѣли уравненія (§ 20): $$x-\alpha=\frac{ds^2}{d^2y}\cdot\frac{dy}{dx}\quad y-\beta=-\frac{ds^2}{d^2y}.$$

Раздѣливъ эти равенства на выраженіе радіуса кривизны:

$$\rho=\frac{ds^3}{dxd^2y},$$

получимъ: $$\frac{x-\alpha}{\rho}=\frac{dy}{ds}, \quad \frac{y-\beta}{\rho}=-\frac{dx}{ds}.$$

Дѣлаемъ подстановку въ равенство (α):

$$d\rho=-\frac{dy}{ds}d\alpha+\frac{dx}{ds}d\beta=\frac{dx.d\beta-dy.d\alpha}{ds}=\frac{dx.d\beta-dy.d\alpha}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Опредѣляемъ dy изъ равенства (32a):

$$dy=-\frac{d\alpha.dx}{d\beta}$$

и вставляемъ въ выраженіе $d\rho$:

$$d\rho=\frac{dxd\beta+\frac{d\alpha dx}{d\beta}d\alpha}{\sqrt{dx^2+\frac{d\alpha^2dx^2}{d\beta^2}}}=\frac{dx(d\beta^2+d\alpha^2)}{\sqrt{dx^2d\beta^2+d\alpha^2dx^2}}$$

или $$d\rho=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32b)$$

что и требовалось доказать.

Обозначивъ $\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}$ черезъ $d\sigma$, будемъ имѣть

$$d\rho=d\sigma,$$

или, проинтегрировавъ:

$$\rho=\sigma+C.$$

§ 27. Свойство третье. Разность между двумя радіусами кривизны равна заключающейся между ними дугѣ развертки.

По предыдущему для точекъ кривой M и M' имѣемъ:

$$\rho=\sigma+C.$$
$$\rho'=\sigma'+C.$$

Вычтя одно равенство изъ другого, получимъ.

$$\rho'-\rho=\sigma'-\sigma.$$

σ и σ' суть приращенія дуги до O и O' отъ нѣкоторой точки C. Слѣдовательно: $\rho'-\rho=CO'-CO=O'O.$

Доказанное свойство позволяетъ по разверткѣ строить кривую. Радіусы кривизны проводятся касательно къ разверткѣ и на нихъ откладываются отрѣзки, отличающіеся одинъ отъ другого на длину соотвѣтственной дуги.

§ 28. Радіусъ кривизны и развертка циклоиды.

Возьмемъ уравненія циклоиды (8)

$$x=R(\omega-\mathrm{Sin}\omega)$$
$$y=R(1-\mathrm{Cos}\omega).$$

Чтобы найти радіусъ кривизны и координаты центра кривизны какой-нибудь точки, надо составить первый и второй дифференціалы, а также дифференціалъ дуги. Продифференцировавъ уравненія кривой, получимъ:

$$dx = R(1-\mathrm{Cos}\,\omega)d\omega = y\,d\omega$$
$$dy = R\,\mathrm{Sin}\,\omega\, d\omega,$$

отсюда
$$\frac{dy}{dx} = \frac{R\,\mathrm{Sin}\,\omega}{y}.$$

Изъ второго уравненія кривой, имѣемъ:

$$\mathrm{Cos}\,\omega = \frac{R-y}{R};$$

слѣдовательно:

$$\mathrm{Sin}\,\omega = \sqrt{1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2} = \frac{1}{R}\sqrt{2Ry-y^2}.$$

Вставивъ это значеніе $\mathrm{Sin}\,\omega$ въ первую производную будемъ имѣть:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2R}{y}-1}.$$

Находимъ вторую производную.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2R}{2\sqrt{\frac{2R}{y}-1}\,.\,y^2}\,\frac{dy}{dx} = -\frac{R\sqrt{\frac{2R}{y}-1}}{y^2\sqrt{\frac{2R}{y}-1}} = -\frac{R}{y^2}.$$

Квадратъ дифференціала дуги будетъ:

$$ds^2 = dx^2+dy^2 = dx^2+\left(\frac{2R}{y}-1\right)dx^2 = \frac{2R}{y}dx^2.$$

Всѣ найденныя величины подставляемъ въ формулу радіуса кривизны:

$$\rho = \frac{\frac{2R}{y}\sqrt{\frac{2R}{y}}\,dx^3\,.\,y^2}{dx\,.\,dx^2\,.\,R} = 2\sqrt{\frac{2R}{y}}\,y = 2\sqrt{2Ry}.$$

Такъ какъ $y = QN$, то:

$$\rho = 2\sqrt{2QN\,.\,GN} = 2MN.$$

т.-е. *радіусъ кривизны равенъ двойной длинѣ нормали.*

Координаты центра кривизны найдемъ изъ уравненія (§ 20):

$$x-\alpha=\frac{ds^2}{d^2y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$y-\beta=-\frac{ds^2}{d^2y}.$$

именно:

$$\beta=y+\frac{ds^2}{d^2y}=y-\frac{2Rdx^2y^2}{yRdx^2}=y-2y=-y.$$

$$\alpha=x-\frac{ds^2}{d^2y}\cdot\frac{dx}{dy}=x+2y\frac{R\operatorname{Sin}\omega}{y}=x+2\sqrt{2Ry-y^2}.$$

Замѣчаемъ, что ординаты развертки равны по абсолютной величинѣ ординатамъ кривой (то-же видно изъ треугольниковъ MQN и QKN). Подставивъ выраженія x и y изъ уравненій кривой, имѣемъ:

$$\alpha=R(\omega+\operatorname{Sin}\omega)$$

$$\beta=-R(1-\operatorname{Cos}\omega).$$

Это—уравненія развертки, изъ которыхъ видно, что развертка циклоиды есть также циклоида $OO'LS$ на черт. 31).

§ 29. *Радіусъ кривизны и развертка эллипса.* Для эллипса мы имѣли (§ 5):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

Найдя дифференціалъ дуги:

$$ds=\sqrt{dx^2+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}dx^2}=\frac{dx}{ay^2}(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{1}{2}},$$

вставляемъ его въ выраженіе радіуса кривизны:

$$\rho=\frac{dx^3(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}a^2y^3}{a^6y^3.dx.b^4dx^2}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Найдемъ радіусъ кривизны для точекъ $A(a,o)$ и $B(o,b)$ (черт. 32). Для A:

$$\rho=\frac{(b^4a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{b^2}{a};$$

Для B:

$$\rho=\frac{(a^4b^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}=\frac{a^2}{b}.$$

Центры кривизны для этихъ точекъ находятся приблизительно въ O_A и O_B.

Найдемъ координаты центра кривизны для общаго случая. Имѣемъ:

$$y-\beta=-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)dx^2a^2y^3}{a^4y^2(-b^4)dx^2}=-\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2b^4}y$$

$$x-\alpha=\frac{ds^2}{d^2y}\,\frac{dy}{dx}=-\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2b^4}\,y\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)=\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4b^2}\,x,$$

откуда:

$$\alpha=x-\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4b^2}x=x\frac{a^4b^2-a^4y^2-b^4x^2}{a^4b^2}$$

$$\beta=y-\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^2b^4}y=y\frac{a^2b^4-a^4y^2-b^4x^2}{a^2b^4}.$$

Уравненіе эллипса $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ даетъ соотношенія:

$$a^4y^2=a^4b^2-a^2b^2x^2$$
$$b^4x^2=a^2b^4-a^2b^2y^2;$$

слѣдовательно, α и β выразятся такъ:

$$\alpha=x\frac{a^4b^2-a^4b^2+a^2b^2x^2-b^4x^2}{a^4b^2}=x^3\frac{a^2-b^2}{a^4}=x^3\frac{c^2}{a^4}$$

$$\beta=y\frac{a^2b^4-a^2b^4+a^2b^2y^2-b^4y^2}{a^2b^4}=y^3\frac{b^2-a^2}{b^4}=-y^3\frac{c^2}{b^4}.$$

Чтобы найти *уравненіе развертки*, мы должны, принявъ α и β за текущія координаты, исключить x и y изъ уравненія кривой. Изъ только что полученныхъ выраженій имѣемъ:

$$x=\sqrt[3]{\frac{a^4\alpha}{c^2}},\quad y=-\sqrt[3]{\frac{b^4\beta}{c^2}}.$$

Эти значенія x и y вставляемъ въ уравненіе эллипса

$$a^2\sqrt[3]{\frac{b^8\beta^2}{c^4}}+b^2\sqrt[3]{\frac{a^8\alpha^2}{c^4}}=a^2b^2,$$

или

$$\sqrt[3]{\frac{b^2\beta^2}{c^4}}+\sqrt[3]{\frac{a^2\alpha^2}{c^4}}=1.$$

Если обозначить $\frac{c^2}{b}$ черезъ n и $\frac{c^2}{a}=m$, то уравненіе принимаетъ видъ:

$$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Уравненіе это, изображаетъ кривую, называемую *астроидой* (черт. 33), *восемнадцатой степени.*

Дѣйствительно, положивъ:

$$\alpha=\xi^3,\quad \beta=\eta^3.$$

приведемъ его къ такому виду:

$$\frac{\xi^2}{m^{2/3}}+\frac{\eta^2}{n^{2/3}}=1.$$

Три послѣднія равенства по исключеніи ξ и η даютъ разсматриваемое уравненіе; но степени этихъ равенствъ относительно исключаемыхъ величинъ равны 3,3 и 2. Результатъ исключенія имѣетъ, слѣдовательно, относительно α и β степень равную $3.3.2=18$.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Кривизна кривыхъ въ пространствѣ.

§ 30. Соприкосновеніе кривыхъ двоякой кривизны. Положимъ, что даны въ пространствѣ двѣ кривыя:

$$1)\ \begin{aligned} x&=f(z)\\ y&=\psi(z)\end{aligned}\qquad\qquad 2)\ \begin{aligned} x&=\varphi(z)\\ y&=\chi(z).\end{aligned}$$

Въ случаѣ пересѣченія:

$$X=x,\quad Y=y,\quad Z=z.$$

и

$$\begin{aligned} f(z)&=\varphi(z)\\ \psi(z)&=\chi(z).\end{aligned}$$

Пересѣчемъ наши кривыя (черт. 34) плоскостью, параллельной xy и проходящей на разстояніи отъ нея, равномъ $z+\Delta z$. На обѣихъ кривыхъ получимъ точки, опредѣляемыя равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x+\Delta x&=f(z+\Delta z)\\ y+\Delta y&=\psi(z+\Delta z)\end{aligned}\ \right|\ \begin{aligned} x+\Delta x&=\varphi(z+\Delta z)\\ y+\Delta y&=\chi(z+\Delta z).\end{aligned}$$

Разстояніе $M'M''=\delta$ между этими точками выразится такъ:

$$\delta=\sqrt{[f(z+\Delta z)-\varphi(z+\Delta z)]^2+[\psi(z+\Delta z)-\chi(z+\Delta z)]^2}.$$

Разложивъ функціи f, φ, ψ, χ, по правилу Тейлора, получимъ:

$$\delta=\sqrt{\begin{aligned}&\left\{f(z)-\varphi(z)+\Delta z[f'(z)-\varphi'(z)]+\frac{\Delta z^2}{1.2}[f''(z)-\varphi''(z)]+\ldots\right\}^2+\\ &+\left\{\psi(z)-\chi(z)+\Delta z[\psi'(z)-\chi'(z)]+\frac{\Delta z^2}{1.2}[\psi''(z)-\chi''(z)]+\ldots\right\}^2\end{aligned}}.$$

Повторяя разсужденія, подобныя изложеннымъ уже для плоскихъ кривыхъ (§ 19), заключимъ, что *для соприкосновенія n-го порядка необходимо равенство нулю функцій и ихъ производныхъ до n-ой включительно*, и что *разстояніе* δ *есть безконечно-малая порядка на единицу большаго порядка соприкосновенія.*

§ 31. *Соприкасающаяся плоскость.* Поставимъ себѣ задачею *найти кругъ, имѣющій съ кривою въ данной точкѣ соприкосновеніе второго порядка.* Такой кругъ есть *кругъ кривизны*, его плоскость называется *соприкасающейся плоскостью (plan osculateur).*

Пусть дана кривая:

$$X=f(z),\quad Y=\psi(z).$$

Уравненія круга кривизны и соприкасающейся плоскости имѣютъ видъ:

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=\rho^2$$
$$A(X-a)+B(Y-b)+C(Z-c)=0.$$

Они заключаютъ шесть неизвѣстныхъ параметровъ a, b, c, — координаты центра кривизны, ρ—радіусъ кривизны, и два отношенія между A, B и C—параметры соприкасающейся плоскости. Для нахожденія этихъ параметровъ составляемъ еще четыре уравненія, дифференцируя имѣющіяся два раза, при чемъ для симметріи всѣ перемѣнныя считаемъ зависимыми.

Первые дифференціалы будутъ:

$$(X-a)dx+(Y-b)dy+(Z-c)dz=0.$$
$$Adx+Bdy+Cdz=0$$

и вторые дифференціалы:

$$(X-a)d^2x+(Y-b)d^2y+(Z-c)d^2z+dx^2+dy^2+dz^2=0$$
$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0.$$

Такъ какъ мы разсматриваемъ значенія параметровъ a, b, c, ρ A, B, C для точки пересѣченія данной кривой съ кругомъ кривизны и соприкасающейся плоскостью, то для ихъ опредѣленія замѣняемъ текущія координаты x, y, z координатами точки кривой x, y, z. Замѣтивъ что

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2,$$

гдѣ ds есть дифференціалъ дуги кривой двоякой кривизны, получимъ изъ нашихъ шести уравненій тождества:

$$\left.\begin{array}{ll}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2 & (a)\\ A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0 & (b)\\ (x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=0 & (c)\\ Adx+Bdy+Cdz=0 & (d)\\ ds^2+(x-a)d^2x+(y-b)d^2y+(z-c)d^2z=0 & (e)\\ Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=0 & (f)\end{array}\right\} \ldots (33)$$

Помноживъ равенство (d) на d^2z и вычтя изъ него равенство (f), умноженное на dz, получимъ:

$$A(dx\,.\,d^2z-dz\,.\,d^2x)+B(dyd^2z-dz\,.\,d^2y)=0.$$

Исключая подобнымъ же образомъ послѣдовательно B и A, найдемъ:

$$A(dx\,.\,d^2y-dy\,.\,d^2x)+C(dz\,.\,d^2y-dy\,.\,d^2z)=0$$

$$B(dy\,.\,d^2x-dx\,.\,d^2y)+C(dz\,.\,d^2x-dx\,.\,d^2z)=0.$$

Изъ трехъ послѣднихъ равенствъ вытекаетъ:

$$\frac{A}{dy\,.\,d^2z-dz\,.\,d^2y}=\frac{B}{dz\,.\,d^2x-dx\,.\,d^2z}=\frac{C}{dx\,.\,d^2y-dy\,.\,d^2x}. \qquad (34)$$

Коэффиціенты уравненія, соприкасающейся плоскости A, B, C, пропорціональны косинусамъ угловъ λ, μ, ν, образуемымъ этою плоскостью съ плоскостями координатъ:

$$\frac{A}{\mathrm{Cos}\lambda}=\frac{B}{\mathrm{Cos}\mu}=\frac{C}{\mathrm{Cos}\nu}.$$

Замѣнивъ эти коэффиціенты въ выраженіи (34) косинусами угловъ, будемъ имѣть:

$$\frac{\mathrm{Cos}\lambda}{dy\,.\,d^2z-dz\,.\,d^2y}=\frac{\mathrm{Cos}\mu}{dz\,.\,d^2x-dx\,.\,d^2z}=\frac{\mathrm{Cos}\,\nu}{dx\,.\,d^2y-dy\,.\,d^2x}\,\cdot\cdot \quad (34a)$$

Вставляя въ уравненіе въ началѣ этого § вмѣсто A, B, C пропорціональныя имъ количества изъ выраженія (34), получимъ уравненіе соприкасающейся плоскости:

$$(dyd^2z-dz\,.\,d^2y)(X-a)+(dzd^2x-dx\,.\,d^2z)(Y-b)+$$
$$+(dx\,.\,d^2y-dyd^2x)(Z-c)=0\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Вычтя изъ этого уравненія тождество $(33b)$, можемъ написать его въ видѣ:

$$(dy\,.\,d^2z-dz\,.\,d^2y)(X-x)+(dz\,.\,d^2x-dx\,.\,d^2z)(Y-y)+$$
$$+(dx\,.\,d^2y-dy\,.\,d^2x)(Z-z)=0.$$

§ 32. Косинусы угловъ соприкасающейся плоскости съ плоскостями координатъ.

Соприкасающаяся плоскость, какъ видно изъ ея уравненія, образуетъ съ координатными плоскостями углы, косинусы которыхъ суть:

$$\operatorname{Cos}\lambda=\frac{dyd^2z-dz.d^2y}{\sqrt{(dy.d^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\mu=\frac{dzd^2x-dxd^2z}{\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\nu=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}}.$$

Эти выраженія можно упростить. Раскроемъ скобки въ подкоренномъ выраженіи. которое обозначимъ черезъ P:

$$P=dy^2d^2z^2+dz^2d^2y^2-2dydzd^2yd^2z+dz^2d^2x^2+dx^2d^2z^2-$$
$$-2dzdxd^2zd^2x+dx^2d^2y^2+dy^2d^2x^2-2dxdyd^2xd^2y.$$

Прибавимъ и вычтемъ сумму $(dx^2d^2x^2+d^2y^2dy^2+dz^2d^2z^2)$; вынеся за скобки квадраты вторыхъ дифференціаловъ, получимъ:

$$P=d^2x^2(dx^2+dy^2+dz^2)+d^2y^2(dx^2+dy^2+dz^2)+$$
$$+d^2z^2(dx^2+dy^2+dz^2)-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2=$$
$$=ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)-(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)^2.$$

Продифференцировавъ ds^2, замѣтимъ, что вычитаемымъ служитъ $(ds.d^2s)^2$. Слѣдовательно

$$P=ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)-ds^2.d^2s^2=ds^2(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2).$$

Косинусы λ, μ, ν, выразятся болѣе простыми формулами:

$$\operatorname{Cos}\lambda=\frac{dy.d^2z-dz.d^2y}{ds\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\mu=\frac{dz.d^2x-dx.d^2z}{ds\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}}$$

$$\operatorname{Cos}\nu=\frac{dx.d^2y-dy.d^2x}{ds\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}}.$$

Если главнымъ перемѣннымъ считается s, то d^2s^2 пропадаетъ.

§ 32. *Главная нормаль.* Въ данной точкѣ кривой двоякой кривизны можно провести безчисленное множество нормальныхъ прямыхъ; всякая проходящая черезъ нее прямая, заключающаяся въ нормальной плоскости, будетъ нормалью. Но среди этихъ нормалей существуютъ двѣ замѣчательныхъ: это нормаль, лежащая въ соприкасающейся плоскости, называемая *главною*, и перпендикулярная къ ней, называемая *бинормалью*. Найдемъ уравненія главной нормали.

Напишемъ равенства (33b) и (33c):

$$A(X-a)+B(Y-b)+C(Z-c)=0$$
$$(X-a)dx+(Y-b)dy+(Z-c)dz=0.$$

Если координаты центра кривизны a, b, c считать текущими координатами, то первое равенство представитъ собою уравненіе соприкасающейся плоскости въ точкѣ x, y, z (35), а второе—уравненіе нормальной плоскости (15) въ той же точкѣ. Слѣдовательно, совокупность этихъ двухъ уравненій:

$$A(x-X)+B(y-Y)+C(z-Z)=0$$
$$(x-X)dx+(y-Y)dy+(z-Z)dz=0$$

представитъ собою главную нормаль.

Дадимъ уравненіямъ главной нормали нѣсколько иной видъ. Умножимъ первое на dz, а второе—на c и вычтемъ одно изъ другого:

$$(Adz-Cdx)(X-x)+(Bdz-Cdy)(Y-y)=0,$$

или

$$\frac{X-x}{Bdz-Cdy}=\frac{Y-y}{Cdx-Adz}.$$

Исключая изъ первоначальныхъ уравненій $(X-x)$ или $(Y-y)$, получимъ второе уравненіе. Такимъ образомъ получимъ систему:

$$\frac{X-x}{Bdz-Cdy}=\frac{Y-y}{Cdx-Adz}=\frac{Z-z}{Ady-Bdx}.$$

Найдемъ γ знаменатель пропорцій (34) и выразимъ изъ нихъ $(Bdz-Cdy)$:

$$Bdz-Cdy=\gamma(dz^2d^2x-dxdzd^2z+dy^2d^2x-dxdyd^2y).$$

Прибавивъ и вычтя во второй части γdx^2d^2x, будемъ имѣть:

$$Bdz-Cdy=\gamma\left[ds^2d^2x-dx(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)\right]=$$
$$=\gamma ds(dsd^2x-dxd^2s)$$

Такимъ же способомъ найдемъ:

$$Cdx-Adz=\gamma ds(dsd^2y-dyd^2s)$$
$$Ady-Bdx=\gamma ds(dsd^2z-dzd^2y).$$

отсюда:

$$\frac{Bdz-Cdy}{dsd^2x-dxd^2s}=\frac{Cdx-Adz}{dsd^2y-dxd^2s}=\frac{Ady-Bdx}{dsd^2z-dzd^2s},$$

слѣдовательно, полученную систему уравненія можно представить въ видѣ:

$$\frac{X-x}{dsd^2x-dxd^2s}=\frac{Y-y}{dsd^2y-dyd^2s}=\frac{Z-z}{dsd^2z-dzd^2s}.$$

Въ случаѣ, если s главное перемѣнное уравненія примутъ видъ:

$$\frac{X-x}{d^2x}=\frac{Y-y}{d^2y}=\frac{Z-z}{d^2z}.$$

Въ этомъ видѣ они легче запоминаются. Отъ нихъ же можно перейти и къ общему случаю, т. е. когда главное перемѣнное не s. Для этого надо раздѣлить всѣ знаменатели дробей на ds^2 и вычислить $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$, какъ производныя $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, наприм.:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{ds.d^2x-dx.d^2s}{ds^3}.$$

Ту же систему можно представить въ видѣ:

$$\frac{X-x}{\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)}=\frac{Y-y}{\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)}=\frac{Z-z}{\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right)}.$$

Уравненія главной нормали (см. въ первоначальномъ видѣ) удовлетворяются координатами центра кривизны: a, b, c. Слѣдовательно, *главная нормаль проходитъ черезъ центръ кривизны*. Вставивъ a, b, c въ уравненія нормали $\frac{X-x}{d^2x}=\frac{Y-y}{d^2y}=\frac{Z-z}{d^2z}$, мы получимъ тождество:

$$\frac{X-a}{d^2x}=\frac{Y-b}{d^2y}=\frac{Z-c}{d^2z}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

имѣющее мѣсто, если главное перемѣнное s. Изъ него можемъ, по предыдущему, получить тождества, справедливыя при произвольномъ независимомъ перемѣнномъ.

§ 34. *Центръ и радіусъ первой кривизны.* Пусть главное перемѣнное s. Тогда по предыдущему:

$$X-a=(Z-c)\frac{d^2x}{d^2z}$$

$$Y-b=(Z-c)\frac{d^2y}{d^2z}.$$

Вставимъ эти выраженія въ равенство (33с), которое пишется такъ: $ds^2+(X-a)d^2x+(Y-b)d^2y+(Z-c)d^2z=0$, получимъ:

$$(Z-c)\frac{d^2x^2}{d^2z}+(Z-c)\frac{d^2y^2}{d^2z}+(Z-c)d^2z+ds^2=0.$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned} Z-c &= \frac{ds^2 d^2z}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2} \\ &\text{Подобнымъ же образомъ получимъ:} \\ Y-b &= -\frac{ds^2 d^2y}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2} \\ X-a &= -\frac{ds^2 d^2x}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

Изъ этихъ равенствъ опредѣляются *координаты* a, b, c *центра кривизны*. Если же къ нимъ присоединить условія того, что точка (x, y, z) лежитъ на кривой, т. е.:

$$x=f(z), \quad y=\psi(z)$$

и исключить x, y, z, получимъ уравненія *линіи центровъ кривизны*:

$$F_1(a, b, c)=0,$$
$$F_2(a, b, c)=0.$$

Чтобы найти радіусъ кривизны ρ, въ равенство (33a):

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=\rho$$

вставимъ значенія $(X-a)$, $(Y-b)$, $(Z-c)$ изъ (37):

$$\rho^2 = ds^4\frac{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}{(d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2)^2}.$$

Отсюда:
$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

или
$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} \ldots\ldots\ldots (38a)$$

не будемъ забывать, что это выраженіе справедливо только, если главное перемѣнное s. Въ противномъ же случаѣ замѣняемъ $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ черезъ $\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right)$. Найденный радіусъ кривизны называется *радіусомъ первой кривизны*.

Формулу (38a) можно представить и въ такомъ видѣ:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}} \ldots\ldots (40)$$

Если s не главное перемѣнное, то:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}=\frac{ds.d^2x-dxd^2s}{ds^3}=\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2s}{ds^2}$$

и т. д. и формула принимаетъ видъ:

$$\rho=\frac{ds^3}{\sqrt{(dsd^2x-dxd^2s)^2+(dsd^2y-dyd^2s)^2+(dsd^2z-dz.d^2s)^2}}\cdot \quad (40a)$$

По упрощеніи ея (какъ въ § 32) будемъ имѣть:

$$\rho=\frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Не трудно найти *углы радіуса кривизны* съ осями координатъ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cos}\lambda_1&=\frac{x-a}{\rho}=\frac{d^2x}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}}\\
\mathrm{Cos}\mu_1&=\frac{Y-b}{\rho}=\frac{d^2y}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}}\ldots\ldots\ldots (39)\\
\mathrm{Cos}\nu_1&=\frac{Z-c}{\rho}=\frac{d^2z}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}}.
\end{aligned}$$

§ 35. Уголъ соприкосновенности. Уголъ ω между двумя радіусами кривизны называется *угломъ соприкосновенности* (*angle de contingence*).

Разсматривая кривую на безконечно-маломъ протяженіи, какъ дугу круга, получимъ:

$$ds=\rho d\omega;$$

слѣдовательно:

$$d\omega=\frac{ds}{\rho}=\frac{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}}{ds}=\sqrt{\frac{d^2x^2}{ds^2}+\frac{d^2y^2}{ds^2}+\frac{d^2z^2}{ds^2}}=$$

$$=\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Такъ какъ $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ равны косинусамъ угловъ касательной съ соотвѣтствующими осями (§ 10), то можемъ написать:

$$d\omega=\sqrt{(d\mathrm{Cos}\alpha)^2+(d\mathrm{Cos}\beta)^2+(d\mathrm{Cos}\gamma)^2}.$$

Самый уголъ ω выражается, слѣдовательно, такимъ образомъ

$$\omega=\int\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

§ 36. Вторая кривизна. Кромѣ кривизны кривой, измѣряемой радіусомъ кривизны, заключающимся въ соприкасающейся плос-

кости, существуетъ *вторая кривизна*, которая обнаруживается въ измѣненіи направленія соприкасающейся плоскости. Уголъ двухъ соприкасающихся плоскостей, или двухъ бинормалей, называется *угломъ крученія* или *сокращенія* (*angle de torsion, angle de flexion*), соотвѣтствующій ему радіусъ кривизны называется *радіусомъ второй кривизны*.

Пусть положеніе соприкасающейся плоскости въ точкѣ M опредѣляется косинусами $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, и въ смежной точкѣ M' — $\cos\lambda+\Delta\cos\lambda$, $\cos\mu+\Delta\cos\mu$, $\cos\nu+\Delta\cos\nu$.

Уголъ между этими плоскостями, приращеніе $\Delta\psi$ угла крученія ψ, опредѣляется по формулѣ:

$$\cos\Delta\psi=\cos\lambda(\cos\lambda+\Delta\cos\lambda)+\cos\mu(\cos\mu+\Delta\cos\mu)+\cos\nu(\cos\nu+\Delta\cos\nu).$$

Раскрываемъ скобки:

$$\cos\Delta\psi=\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu+\cos\lambda.\Delta\cos\lambda+\cos\mu.\Delta\cos\mu+\cos\nu.\Delta\cos\nu$$

Замѣнивъ сумму квадратовъ косинусовъ единицей и перенеся ее въ лѣвую часть, получимъ:

$$2\sin^2\frac{\Delta\psi}{2}=-(\cos\lambda.\Delta\cos\lambda+\cos\mu.\Delta\cos\mu+\cos\nu.\Delta\cos\nu).$$

Напишемъ тождество:

$$(\cos\lambda+\Delta\cos\lambda)^2+(\cos\mu+\Delta\cos\mu)^2+(\cos\nu+\Delta\cos\nu)^2=1.$$

Раскрывъ его:

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu+(\Delta\cos\lambda)^2+(\Delta\cos\mu)^2+(\Delta\cos\nu)^2+2\cos\lambda\Delta\cos\lambda+2\cos\mu\Delta\cos\mu+2\cos\nu\Delta\cos\nu=1,$$

получимъ:

$$\cos\lambda\Delta\cos\lambda+\cos\mu\Delta\cos\mu+\cos\nu\Delta\cos\nu=-\frac{1}{2}[(\Delta\cos\lambda)^2+(\Delta\cos\mu)^2+(\Delta\cos\nu)^2].$$

Выраженіе $2\sin^2\frac{\Delta\psi}{2}$ послѣ соотвѣтствующей подстановки приметъ видъ

$$2\sin^2\frac{\Delta\psi}{2}=\frac{1}{2}[(\Delta\cos\lambda)^2+(\Delta\cos\mu)^2+(\Delta\cos\nu)^2],$$

или

$$\left(2\sin\frac{\Delta\psi}{2}\right)^2=(\Delta\cos\lambda)^2+(\Delta\cos\mu)^2+(\Delta\cos\nu)^2.$$

Придадимъ ему форму

$$\frac{\left(\operatorname{Sin}\frac{\Delta\psi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)^2}\left(\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right)^2=\left(\frac{\Delta\operatorname{Cos}\lambda}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta\operatorname{Cos}\mu}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta\operatorname{Cos}\nu}{\Delta s}\right)^2$$

и перейдемъ къ предѣлу:

$$\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\operatorname{Cos}\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\operatorname{Cos}\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\operatorname{Cos}\nu}{ds}\right)^2;$$

отсюда:

$$d\psi=\sqrt{(d\operatorname{Cos}\lambda)^2+(d\operatorname{Cos}\mu)^2+(d\operatorname{Cos}\nu)^2}$$

$$\psi=\int\sqrt{\left(\frac{d\operatorname{Cos}\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\operatorname{Cos}\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\operatorname{Cos}\nu}{ds}\right)^2}\,ds.$$

Радіусъ второй кривизны, ρ_1, найдемъ изъ соотношенія (см. § 35):

$$ds=\rho_1 d\psi;$$

получится:

$$\rho_1=\frac{ds}{d\psi}=\frac{ds}{\sqrt{(d\operatorname{Cos}\lambda)^2+(d\operatorname{Cos}\mu)^2+(d\operatorname{Cos}\nu)^2}}\,\ldots\ldots\ldots(42)$$

Входящіе сюда косинусы выражаются формулами (35a)

§ 37. Примѣръ. Винтовая линія.

Винтовая линія образуется точкою движущихся равномѣрно по окружности перемѣщающейся равномѣрно въ направленіи, перпендикулярномъ къ одной плоскости.

Изъ опредѣленія слѣдуеть, что винтовая линія лежитъ на цилиндрѣ. Пусть его радіусъ $R=OA$ (черт. 35) и пусть точка начала двигаться изъ A. По опредѣленію:

$$\frac{Mp}{Ap}=\text{Const.}=a.$$

Когда точка сдѣлаетъ полный оборотъ $2\pi R$, она поднимется на высоту H, называемую *числомъ винта*, при чемъ:

$$\frac{2\pi R}{H}=a.$$

Чтобы составить уравненія винтовой линіи, воспользуемся нѣкоторымъ вспомогательнымъ перемѣннымъ, за которое примемъ уголъ съ плоскостью xz радіуса, соединяющаго точку съ осью; этотъ уголъ равенъ проложенію его ω. Такъ какъ $MP=z$ и $AP=R\omega$, то $z=aR\omega$ и искомыя уравненія суть:

$$x=R\operatorname{Cos}\omega,\ y=R\operatorname{Sin}\omega,\ z=aR\omega.$$

Въ случаѣ надобности мы можемъ исключить ω и получить два уравненія:

$$x=R\mathrm{Cos}\frac{z}{aR}$$

$$y=R\mathrm{Sin}\frac{z}{aR}.$$

Въ случаѣ трехъ уравненій главнымъ перемѣннымъ служитъ ω; продифференцировавъ по ω, получимъ:

$$dx=-R\mathrm{Sin}\omega d\omega$$
$$dy=R\mathrm{Cos}\omega d\omega$$
$$dz=aRd\omega.$$

Постараемся свести все къ главному перемѣнному z.

Для этого выразимъ dx и dy черезъ dz

$$dx=-yd\omega=-y\frac{dz}{aR}$$

$$dy=xd\omega=x\frac{dz}{aR}.$$

Подставляемъ эти значенія въ выраженіе ds^2:

$$ds^2=y^2\frac{dz^2}{a^2R^2}+x^2\frac{dz^2}{a^2R^2}+dz^2=\frac{y^2+x^2+a^2R^2}{a^2R^2}dz^2.$$

Не трудно видѣть изъ чертежа, что: $x^2+y^2=R^2$, слѣдовательно:

$$ds^2=\frac{R^2+a^2R^2}{a^2R^2}dz^2=\frac{1+a^2}{a^2}dz^2.$$

Отсюда: $$dz=\frac{ads}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Вставляемъ значеніе dz въ выраженія dx и dy:

$$dx=-\frac{yds}{R\sqrt{1+a^2}}$$

$$dy=\frac{xds}{R\sqrt{1+a^2}}.$$

Для нахожденія радіуса первой кривизны намъ нужны вторые дифференціалы:

$$d^2x=-\frac{dsdy}{R\sqrt{1+a^2}}=-\frac{xds^2}{R^2(1+a^2)}$$

$$d^2y=\frac{dsdx}{R\sqrt{1+a^2}}=-\frac{yds^2}{R^2(1+a^2)}$$

$$d^2z=0,$$

имѣемъ:

$$d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2=\frac{x^2ds^4}{R^4(1+a^2)^2}+\frac{y^2ds^4}{R^4(1+a^2)^2}=\frac{(x^2+y^2)ds^4}{R^4(1+a^2)^2}=$$
$$\frac{ds^4}{R^2(1+a^2)^2}$$

и для радіуса первой кривизны получаемъ выраженіе (по формулѣ (38)):

$$\rho=R(1+a^2).$$

Выраженіе это не содержитъ перемѣнныхъ; слѣдовательно, *винтовая линія имѣетъ постоянный радіусъ первой кривизны.*

Отыщемъ теперь радіусъ второй кривизны. Вычисляемъ прежде всего знаменатель въ формулѣ (34)

$$dyd^2z-dzd^2y=\left[\frac{ads}{\sqrt{1+a^2}}\right]\left[-\frac{yds^2}{R^2(1+a^2)}\right]=-\frac{ayds^3}{R^2(1+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$dzd^2x-dxd^2z=\frac{ads}{\sqrt{1+a^2}}\left[-\frac{xds^2}{R^2(1+a^2)}\right]=-\frac{axds^3}{R^2(1+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$dxd^2y-d^2xdy=\left[-\frac{y^2ds^3}{R^3(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]-\left[-\frac{x^2ds^3}{R^3(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{ds^3}{R(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Подкоренное выраженіе формулы (35a) будетъ:

$$\frac{ds^6}{R^4(1+a^2)^3}\left(\frac{a^2y^2+a^2x^2}{R^2}+1\right)=\frac{ds^6}{R^4(1+a^2)^2}.$$

Косинусы угловъ радіуса второй кривизны выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\mathrm{Cos}\lambda=\frac{ay}{R\sqrt{1+a^2}},\quad \mathrm{Cos}\mu=-\frac{ax}{R\sqrt{1+a^2}},\quad \mathrm{Cos}\nu=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

и ихъ дифференціалы:

$$d\mathrm{Cos}\lambda=\frac{ady}{R\sqrt{1+a^2}}=\frac{axds}{R^2(1+a^2)}$$
$$d\mathrm{Cos}\mu=-\frac{adx}{R\sqrt{1+a^2}}=\frac{ayds}{R^2(1+a^2)}$$
$$d\mathrm{Cos}\nu=0.$$

Подкоренное выраженіе формулы (42) принимаетъ видъ:

$$\frac{a^2ds^2}{R^4(1+a^2)^2}(x^2+y^2)=\frac{a^2ds^2}{R^2(1+a^2)^2}.$$

по извлеченіи корня получаемъ:

$$\frac{ads}{R(1+a^2)}$$

и

$$\rho_1 = \frac{R(1+a^2)}{\text{[illegible]}}.$$

Итакъ, *радіусъ второй кривизны имѣетъ тоже постоянную величину;* съ радіусомъ первой кривизны онъ связанъ простымъ соотношеніемъ:

$$a\rho_1 = \rho.$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Образованіе поверхностей движеніемъ линій.

§ 38. *Общая теорія.* Поверхности могутъ быть образованы движеніемъ нѣкоторой кривой, называемой *образующей.* Движеніе этой кривой можетъ быть опредѣлено нѣсколькими данными другими кривыми, которыя должны пересѣкать образующую во всѣхъ ея положеніяхъ; эти кривыя называются *направляющими.* Такъ какъ образующая все время измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, то въ уравненія ея должны входить измѣняющіеся параметры: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ т.-е. эти уравненія должны имѣть видъ:

$$f(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma\ldots)=0.$$
$$F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma\ldots)=0$$

Направляющія выражаются уравненіями вида:

$$\varphi(x,y,z)=0$$
$$\psi(x,y,z)=0.$$

Положимъ, что число параметровъ $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ есть n, а число направляющихъ кривыхъ m. Присоединивъ къ уравненіямъ образующей уравненія одной изъ направляющихъ, получимъ четыре уравненія, изъ которыхъ координаты x,y,z могутъ быть исключены. Результатомъ исключенія явится нѣкоторое соотношеніе между параметрами:

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)=0.$$

Повторивъ ту же операцію со второю направляющею, получимъ второе соотношеніе:

$$\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma\ldots)=0.$$

Вообще, *число соотношеній между параметрами равно числу направляющихъ m.* Выписавъ всѣ эти выраженія:

$$\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0$$
$$\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0.$$

мы будемъ имѣть систему m уравненій относительно $\alpha,\beta,\gamma \ldots$. съ n неизвѣстными. При $m=n$ мы получимъ для $\alpha,\beta,\gamma \ldots$ опредѣленныя значенія, что противорѣчитъ положенію объ измѣняемости параметровъ. То же, съ присоединеніемъ еще связи между $\alpha,\beta,\gamma \ldots$ произойдетъ въ случаѣ $m>n$.

При $m=n-1$ измѣненіе параметровъ возможно: давши одному параметру произвольное значеніе, мы опредѣлимъ другіе параметры, а, слѣдовательно, и положеніе образующей.

Если же $m<n-1$, то, давъ извѣстное значеніе какому-нибудь параметру мы не получимъ опредѣленныхъ значеній для другихъ параметровъ; слѣдовательно, поверхность не опредѣляется. Итакъ, *число направляющихъ равно числу параметровъ безъ единицы.*

Чтобы получить уравненіе поверхности, выписываемъ уравненія образующей и условія, связывающія параметры.

$$f(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0$$
$$F(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0$$
$$\varphi_1\ (\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0$$
$$\varphi_2\ (\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma \ldots .)=0.$$

Изъ этихъ $n+1$ равенствъ исключаемъ n параметровъ. Результатъ исключенія:

$$\xi(x,y,z)=0$$

и представитъ собою уравненіе поверхности.

§ 39. Цилиндрическія поверхности.

Цилиндрическими называются поверхности, образованныя перемѣщеніемъ прямой линіи параллельно самой себѣ.

Согласно этому опредѣленію въ уравненіяхъ образующей,

$$x=mz+\alpha,\quad y=nz+\beta$$

параметры m и n постоянны. Два перемѣнные параметры: α и β

обусловливаютъ существованіе одной направляющей, пусть ея уравненія будутъ:

$$\varphi(x,y,z)=0$$
$$\psi(x,y,z)=0.$$

Задавшись цѣлью изслѣдовать цилиндрическія поверхности въ самомъ общемъ видѣ, мы будемъ считать функціи φ и ψ произвольными По исключеніи координатъ x,y,z изъ уравненій образующей и направляющей, получимъ связь между параметрами α и β вида: $$\beta=\varphi(\alpha),$$
гдѣ φ есть символъ произвольной функціи. Чтобы составить уравненіе цилиндрической поверхности, опредѣляемъ α и β изъ уравненій образующей и вставляемъ въ полученное соотношеніе

$$y-nz=\varphi(x-mz) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Это уравненіе, содержащее произвольную функцію, принадлежитъ *всякой цилиндрической поверхности*. Произвольную функцію можно исключить, пользуясь частными производными. Обозначивъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ черезъ p и $\frac{\partial z}{\partial y}$ черезъ q, диффеpенцируемъ по X и по Y уравненіе (43):

$$-np=\varphi'(x-mz)(1-mp)$$
$$1-nq=\varphi'(x-mz)(-mq);$$

дѣленіемъ перваго равенства на второе исключаемъ произвольную функцію:

$$\frac{np}{1-nq}=\frac{1-mp}{mq},$$

отсюда:

$$mnpq=1-mp-nq+mpnq$$
$$mp+nq=1,$$

или

$$m\frac{\partial z}{\partial x}+n\frac{\partial z}{\partial y}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43a)$$

Полученное *дифференціальное уравненіе съ частными производными* такъ же, какъ и уравненіе (43) изображаетъ цилиндрическую поверхность. Уравненіе (43) есть его *интегралъ*; произвольная функція соотвѣтствуетъ произвольному постоянному въ неопредѣленномъ интегралѣ.

Уравненіе съ частными производными позволяетъ между прочимъ узнать по составу уравненія, принадлежитъ ли оно цилиндру. Пусть, напримѣръ, дано уравненіе:

$$L=0,$$

гдѣ L есть функція x, y, z. Составимъ частныя производныя по x и по y:

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

отсюда опредѣлимъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p=-\frac{\frac{\partial L}{\partial x}}{\frac{\partial L}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q=-\frac{\frac{\partial L}{\partial y}}{\frac{\partial L}{\partial z}}.$$

Если эти уравненія производныхъ удовлетворяютъ уравненію (43a), т. е.

$$m\frac{\partial L}{\partial x}+n\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial L}{\partial z}=0,$$

поверхность цилиндрическая.

§ 40. *Примѣры.* 1) Составимъ уравненіе цилиндра, имѣющаго образующую:

$$x=mz+\alpha,\quad y=nz+\beta$$

и направляющую:

$$x^2+y^2=r^2,\quad z=0.$$

Исключивъ x, y, z, получимъ:

$$\alpha^2+\beta^2=r^2$$

Изъ уравненій образующей:

$$\alpha=x-mz$$
$$\beta=y-nz.$$

Искомое уравненіе есть:

$$(x-mz)^2+(y-nz)^2=r^2.$$

2) Найдемъ условіе, при которомъ уравненіе поверхности второго порядка: $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+$ $+2C'y+2C''z+D=0$ представляетъ цилиндръ.

Составивъ частныя производныя:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2Ax+2B'z+2B''y+2C$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2A'y+2Bz+2B''x+2C'$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2A''z+2By+2B'x+2C''$$

вставляемъ ихъ въ выведенное для цилиндрическихъ поверхностей условіе:

$$m(Ax+B'z+B''y+C)+n(A'y+Bz+B''x+C')+A''z+By+$$
$$+B'x+C''=0,$$

или

$$(mA+nB''+B')x+(mB''+nA'+B)y+(mB'+nB+A'')z+(mC+$$
$$+nC'+C'')=0.$$

Равенство это должно быть тождествомъ при всѣхъ значеніяхъ x, y, z; слѣдовательно:

$$mA+nB''+B'=0$$
$$mB''+nA'+B=0$$
$$mB'+nB+A''=0$$
$$mc+nc'+c''=0$$

Исключивъ отсюда m и n, получимъ два условія вида:

$$F_{I}(A,A',A'',B,\ldots C'')=0$$
$$F_{II}(A,A',A'',B,\ldots C'')=0.$$

§ 41. *Коническія поверхности.* Если вершина конуса имѣетъ координаты: a, b, c, то уравненія образующей имѣютъ видъ:

$$x-a=\alpha(z-c)$$
$$y-b=\beta(z-c).$$

Пусть уравненія направляющей:

$$\Phi(x,y,z)=0$$
$$\psi(x,y,z)=0$$

Извѣстнымъ уже образомъ получимъ соотношеніе между параметрами:

$$\beta=\varphi(\alpha).$$

Вставивъ въ это соотношеніе опредѣленныя изъ уравненій образующей значенія:

$$\alpha=\frac{x-a}{z-c};\quad \beta=\frac{y-b}{z-c};$$

получимъ *уравненіе конуса съ произвольной функціей:*

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Составимъ теперь *уравненіе съ частными производными*, для чего дифференцируемъ полученное по x и по y:

$$-\frac{y-b}{z-c}p=\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\cdot\frac{(z-c)-(x-a)p}{(z-c)^2}$$

$$\frac{(z-c)-(y-b)}{(z-c)^2}q=\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\cdot\left(-\frac{x-a}{(z-c)^2}q\right).$$

Дѣлимъ эти равенства одно на другое и дѣлаемъ возможныя сокращенія:

$$\frac{(y-b)p}{(z-c)-(y-b)q}=\frac{(z-c)-(x-a)p}{(x-a)q}$$

$$(x-a)(y-b)pq=(z-c)^2-(y-b)(z-b)q-(x-a)(z-c)p+$$
$$+(x-a)(y-b)pq.$$

Окончательно получимъ уравненіе:

$$(x-a)p+(y-b)q=(z-c)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14a)$$

§ 42. *Примѣръ.* Положимъ, что уравненія образующей:

$$x=\alpha z, \quad y=\beta z,$$

уравненія направляющей:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=h.$$

Исключивъ x, y, z, получимъ изъ этихъ уравненій:

$$h^2\frac{\alpha^2}{a^2}+h^2\frac{\beta^2}{b^2}=1;$$

Изъ уравненій образующей имѣемъ:

$$\alpha=\frac{x}{z}, \quad \beta=\frac{y}{z}.$$

Искомый конусъ (черт. 36) имѣетъ уравненіе:

$$\frac{h^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{z^2}+\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{x^2}{z^2}=1,$$

или

$$h^2b^2x^2+h^2a^2y^2=a^2b^2z^2.$$

§ 43. *Поверхности вращенія. Уравненіе съ произвольной функціей.* Поверхности вращенія можно разсматривать, какъ геометрическое *мѣсто линій, образуемыхъ пересѣченіемъ параллельныхъ плоскостей концентрическими сферами.* Центръ сферы лежитъ въ произвольной точкѣ *оси вращенія*, плоскости перпендикулярны къ оси (черт. 37). Положимъ, что ось вращенія образуетъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ пропорціональны A, B, C.

Взявъ центромъ какую-нибудь точку на оси. C (a, b, c), можемъ описать изъ нея шаровыя поверхности, уравненія которыхъ имѣютъ видъ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\alpha^2.$$

Пересѣкая эти шары плоскостями, перпендикулярными къ оси, которыя имѣютъ уравненія вида:

$$Ax+By+Cz=\beta,$$

получимъ окружности DE, FG, KL..., которыя будемъ считать образующими. Направляющая линія $DFKLGE$ пусть выражается уравненіями:

$$\varphi(X,Y,Z)=0, \quad \psi(X,Y,Z)=0.$$

Чтобы найти уравненіе поверхности, находимъ прежде всего зависимость между α и β

$$\beta=\varphi(\alpha)$$

или, такъ какъ $\varphi(\alpha)$ — произвольная функція:

$$\beta=\varphi(\alpha^2).$$

Присоединяя уравненія образующей и исключая α и β, получимъ уравненіе поверхности:

$$Ax+By+Cz=\varphi[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2] \qquad (45)$$

Частные случаи. Положимъ, что *ось вращенія проходитъ через начало координатъ*. Въ этомъ случаѣ точку c можемъ взять въ началѣ, т. е. положить:

$$a=0, \; b=0, \; c=0.$$

Уравненіе приметъ видъ:

$$+By+Cz=\varphi(x^2+y^2+z^2) \qquad (45a).$$

Если *ось вращенія совпадаетъ съ осью* Z, то кромѣ того:

$$A=0, \quad B=0, \quad C=1$$

и уравненіе будетъ:

$$Z=\varphi(X^2+Y^2+Z^2) \qquad (45b)$$

Это уравненіе можно представить въ нѣсколько иномъ видѣ. Можемъ написать:

$$X^2+Y^2+Z^2=\varphi_1(Z);$$

отсюда

$$X^2+Y^2=\varphi_1(Z)-Z^2=\varphi_2(Z).$$

или, такъ какъ $\varphi_2(Z)$ и $\varphi(Z)$ произвольныя функціи,

$$Z=\varphi(X^2+Y^2).$$

§ 44. Дифференціальное уравненіе поверхностей вращенія. Для

составленія дифференціальнаго уравненія поверхностей вращенія, дифференцируемъ уравненіе (45) по x и по y:

$$A+Cp=2\varphi'[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2][(x-a)+(z-c)p]$$

$$B+Cq=2\varphi'[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2][(y-b)+(z-c)q]$$

Дѣлимъ одну производную на другую, освобождаемся отъ знаменателя и дѣлаемъ приведеніе:

$$\frac{A+Cp}{B+Cq}=\frac{(x-a)+(z-c)p}{(y-b)+(z-c)q}$$

$$A(y-b)+C(y-b)p+A(z-c)q+C(z-c)pq=B(x-a)+B(z-c)p+$$
$$+C(x-a)q+C(z-c)pq$$

Въ окончательномъ видѣ дифференціальное уравненіе поверхности вращенія будетъ:

$$[C(y-b)-B(z-c)]p+[A(z-c)-C(x-a)]q=B(x-a)-A(y-b) \qquad (45a')$$

Частные случаи. Если *ось вращенія проходитъ черезъ начало координатъ* ($a=0, b=0, c=0$), уравненіе имѣетъ видъ:

$$(Cy-Bz)p+(Az-Cx)q=Bx-Ay \qquad (45aa')$$

Если *ось вращенія есть ось* z, поверхность имѣетъ уравненіе:

$$yp-xq=0,$$

или

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Разгибающіяся поверхности.

§ 45. *Понятіе о разгибающихся поверхностяхъ. Разгибающимися называются поверхности, которыя можно разсматривать, какъ состоящія изъ прямыхъ линій.* Существуютъ два способа образованія разгибающихся поверхностей. Во-первыхъ, поверхность можетъ быть образована *линіями пересѣченія послѣдовательныхъ положеній движущейся плоскости.* Во-вторыхъ, *разгибающаяся поверхность образуется рядомъ касательныхъ прямыхъ въ послѣдовательныхъ точкахъ кривой линіи*, (въ общемъ случаѣ кривой двоякой кривизны).

§ 46. *Первый способъ. Уравненіе съ произвольною функціей.* Дается уравненіе плоскости.

$$Z=A+Bx+Cy;$$

плоскость эта движется по нѣкоторому закону: слѣдовательно, уравненіе ея содержитъ измѣняющійся параметръ α. Положимъ, что:

$$A=\alpha,\quad B=\varphi(\alpha),\quad C=\psi(\alpha),$$

гдѣ φ и ψ—произвольныя функціи. Уравненіе плоскости принимаетъ видъ:

$$Z=\alpha+x\varphi(\alpha)+y\psi(\alpha).$$

Одна изъ прямыхъ линій, лежащихъ на поверхности, опредѣляется пересѣченіемъ этой плоскости съ плоскостью, опредѣляемой смежнымъ значеніемъ параметра α, значеніемъ $(\alpha+\Delta\alpha)$. Эта послѣдняя плоскость имѣетъ уравненіе:

$$z=\alpha+\Delta\alpha+x\varphi(\alpha+\Delta\alpha)+y\psi(\alpha+\Delta\alpha).$$

Разложимъ входящія въ это уравненіе функціи по теоремѣ Тейлора:

$$z=\alpha+\Delta\alpha+x\left[\varphi(\alpha)+\Delta\alpha\varphi'(\alpha)+\frac{\Delta\alpha^2}{1.2}\varphi''(\alpha)\ldots\right]+y\left[\psi(\alpha)+\Delta\alpha\psi'(\alpha)+\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta\alpha^2}{1.2}\psi''(\alpha)+\ldots\right].$$

Замѣтивъ, что въ правой части входитъ сумма $\alpha+x\varphi(\alpha)+y\psi(\alpha)$, равная z, перепишемъ тоже уравненіе въ видѣ:

$$0=\Delta\alpha+x\left[\Delta\alpha\varphi'(\alpha)+\frac{\Delta\alpha^2}{1.2}\varphi''(\alpha)+\ldots\right]+y\left[\Delta\alpha\psi'(\alpha)+\frac{\Delta\alpha^2}{1.2}\psi''(\alpha)\ldots\right].$$

Раздѣливъ уравненіе на $\Delta\alpha$ и перейдя къ предѣлу, при чемъ члены, содержащіе $\Delta\alpha$, обратятся въ нули, получимъ:

$$0=1+x\varphi'(\alpha)+y\psi'(\alpha).$$

Присоединивъ къ этому уравненію уравненіе плоскости въ первоначальномъ положеніи, будемъ имѣть систему:

$$\left.\begin{array}{l} z=\alpha+x\varphi(\alpha)+y\psi(\alpha) \\ 1+x\varphi'(\alpha)+y\psi'(\alpha)=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46).$$

При данномъ α, полученная система представляетъ одну изъ лежащихъ на поверхности прямыхъ. Если же исключить α, получится *уравненіе поверхности*. Исключеніе параметра при рѣшеніи задачи въ общемъ видѣ невозможно: но поверхность можно опредѣлять и системою (46), считая α за нѣкоторое добавочное перемѣнное. Въ простѣйшихъ частныхъ случаяхъ параметръ α исключается. Пусть, напримѣръ:

$$\varphi(\alpha)=\alpha^2$$
$$\psi(\alpha)=-\alpha.$$

Система (46) принимаетъ видъ:

$$Z = a + a^2x + ay$$
$$1 + 2ax + y = 0.$$

По исключеніи a получаемъ уравненіе поверхности:

$$Z = -\frac{1+y}{2x} + \frac{(1+y)^2}{4x^2}x - \frac{1+y}{2x}y.$$

§ 47. *Дифференціальное уравненіе.* Мы можемъ исключить изъ уравненій произвольныя функціи, какъ дѣлали это въ предыдущей главѣ, дифференцируемъ по x и по y первое изъ уравненій (46):

$$p = \frac{\partial a}{\partial x} + \varphi(a) + x\varphi'(a)\frac{\partial a}{\partial x} + y\psi'(a)\frac{\partial a}{\partial x}$$
$$q = \frac{\partial a}{\partial y} + x\varphi'(a)\frac{\partial a}{\partial y} + \psi(a) + y\psi'(a)\frac{\partial a}{\partial y}.$$

Вынося за скобку $\frac{\partial a}{\partial x}$ и $\frac{\partial a}{\partial y}$ и воспользовавшись вторымъ уравненіемъ системы (46), приведемъ полученныя равенства къ такому простому виду.

$$p = \varphi(a)$$
$$q = \psi(a).$$

Такъ какъ φ и ψ—произвольныя функціи, то можемъ написать:

$$p = \Phi(q),$$

гдѣ Φ обозначаетъ также произвольную функцію. Дифференцируя послѣднее выраженіе по x и по y и примѣняя обозначеніе частныхъ производныхъ второго порядка буквами r, s, t (ч. I, § 42), имѣемъ:

$$r = \Phi'(q).s$$
$$s = \Phi'(q).t.$$

Отсюда:

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t},$$

или

$$rt - s^2 = 0.$$

Выведенное *дифференціальное уравненіе развивающейся поверхности* имѣетъ, слѣдовательно, форму:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (47).$$

Уравненія (46) представляютъ его общій интегралъ. Замѣтимъ, что нахожденіе интеграла дифференціальнаго уравненія второго порядка возможно лишь въ рѣдкихъ случаяхъ.

§ 48. *Ребро возврата. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія смежныхъ прямыхъ линій, лежащихъ на поверхности, называется ребромъ возврата.* Уравненія этой кривой получаются изъ уравненій прямыхъ (46) такимъ же образомъ, какимъ уравненіе поверхности получено (§ 46) изъ уравненія плоскости: $z=\alpha+x\varphi(\alpha)+y\psi(\alpha)$. Результатомъ явится система:

$$\begin{gathered} z=\alpha+x\varphi(\alpha)+y\psi(\alpha) \\ 1+x\varphi'(\alpha)+y\psi'(\alpha)=0 \\ x\varphi''(\alpha)+y\psi''(\alpha)=0, \end{gathered}$$

т. е. къ уравненіямъ (46) прибавится вторая производная по α. Эта система опредѣляетъ ребро возврата при помощи параметра α; по исключеніи α въ каждомъ частномъ случаѣ получимъ обычное число уравненій линіи—два.

§ 49. *Второй способъ образованія. Уравненіе съ произвольною функціей.* Поверхность образуется совокупностью касательныхъ линій къ нѣкоторой кривой, положимъ къ кривой

$$x=\varphi(z), \qquad y=\psi(z).$$

Возьмемъ на этой кривой точку съ координатой: $z=\alpha$, т. е. точку $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha]$. Касательная въ этой точкѣ имѣетъ уравненія (14):

$$X-x=\frac{dx}{dz}(Z-z)$$

$$Y-y=\frac{dy}{dz}(Z-z).$$

Въ эти уравненія нужно вставить производныя:

$$\frac{dx}{dz}=\varphi'(z) \qquad \frac{dy}{dz}=\psi'(z),$$

которыя для данной точки (при $z=\alpha$) обращаются въ $\varphi'(\alpha)$ и $\psi'(\alpha)$. Такъ какъ x и y замѣняется черезъ $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$, то для удобства мы можемъ замѣнить большія буквы X, Y, Z черезъ малыя. При этихъ условіяхъ уравненія касательной перепишутся въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} x-\varphi(\alpha)&=\varphi'(\alpha)(z-\alpha) \\ y-\psi(\alpha)&=\psi'(\alpha)(z-\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (48).$$

Если α будетъ считаться перемѣннымъ, то *эти уравненія представляютъ поверхность.* Эта поверхность—разгибающаяся, такъ какъ образована прямыми линіями.

§ 50. Дифференціальное уравненіе. Чтобы доказать, что перемѣщеніемъ касательной можетъ быть образована та же поверхность, что и линіями пересѣченій плоскостей, составимъ дифференціальное уравненіе поверхности (48); оно окажется тождественнымъ съ уравненіемъ (47). Составляемъ частныя производныя уравненій (48) по x и по y:

$$1=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\varphi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\varphi'(\alpha)\left(p-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right).$$

$$0=\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\varphi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\varphi'(\alpha)\left(q-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

$$0=\psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\psi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\psi'(\alpha)\left(p-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right).$$

$$1=\psi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\psi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\psi'(\alpha)\left(q-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

По приведеніи подобныхъ членовъ, написанныя равенства примутъ видъ:

$$1=-\varphi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\varphi'(\alpha)p$$

$$0=-\varphi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\varphi'(\alpha)q$$

$$0=-\psi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\psi'(\alpha)p$$

$$1=-\psi''(\alpha)(z-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\psi'(\alpha)q$$

Множимъ первые два на $\psi''(\alpha)$, два послѣдніе—на—$\varphi''(\alpha)$, и складываемъ первое съ третьимъ, второе—съ четвертымъ:

$$\psi''(\alpha)=\left[\varphi'(\alpha)\psi''(\alpha)-\psi'(\alpha)\varphi''(\alpha)\right]p$$

$$-\varphi''(\alpha)=\left[\varphi'(\alpha)\psi''(\alpha)-\psi'(\alpha)\varphi''(\alpha)\right]q;$$

отсюда:

$$p=\frac{\psi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)\psi''(\alpha)-\psi'(\alpha)\varphi''(\alpha)}=f_1(\alpha).$$

$$q=-\frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)\psi''(\alpha)-\psi'(\alpha)\varphi''(\alpha)}=f_2(\alpha).$$

f_1 и f_2—произвольныя функціи; будучи произвольными функціями одного перемѣннаго α, частныя производныя p и q суть произвольныя функціи одна другой:

$$p=\Phi(q).$$

Исключеніемъ произвольной функціи получится, очевидно (47):

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 51. *Ребра возврата.* При образованіи разгибающейся поверхности касательными, кривая, къ которой проводятся касательныя, и есть ребро возврата, такъ какъ на ней пересѣкаются всякія двѣ сложныя линіи, заключающіяся на поверхности. Слѣдовательно, *ребро возврата опредѣляетъ разгибающуюся поверхность.*

§ 52. *Примѣръ. Винтообразная разгибающаяся поверхность.* Составимъ уравненіе разгибающейся поверхности, опредѣляемой винтовою линіей. Выписавъ уравненія винтовой линіи (49), принимаемой за ребро возврата:

$$x = R\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{aR}\right), \quad y = R\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{aR}\right).$$

и замѣтивъ, что въ данномъ случаѣ при $z = \alpha$:

$$\varphi(\alpha) = R\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) \quad \varphi'(\alpha) = -R\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)\frac{1}{aR} = -\frac{1}{a}\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right).$$

$$\psi(\alpha) = R\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) \quad \psi'(\alpha) = R\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)\frac{1}{aR} = \frac{1}{a}\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right),$$

напишемъ уравненія поверхности (48) въ видѣ:

$$x = R\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) - \frac{1}{a}\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)(z-\alpha).$$

$$y = R\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) + \frac{1}{a}\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)(z-\alpha).$$

Параметръ α можетъ быть исключенъ. Умноживъ первое уравненіе на $\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)$ второе на $\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)$ и сложивъ получимъ:

$$\left[x - R\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)\right]\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) + \left[y - R\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)\right]\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) = 0,$$

или

$$x\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) + y\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) = R.$$

Возведемъ въ квадратъ обѣ части уравненій поверхности:

$$x^2 - 2Rx\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) + R^2\mathrm{Cos}^2\left(\frac{\alpha}{aR}\right) = \frac{1}{a^2}\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\alpha}{aR}\right)(z-\alpha)^2$$

$$y^2 - 2Ry\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right) + R^2\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\alpha}{aR}\right) = \frac{1}{a^2}\mathrm{Cos}^2\left(\frac{\alpha}{aR}\right)(z-\alpha)^2.$$

Складывая, будемъ имѣть:

$$x^2+y^2+R^2-2R\left[x\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)+y\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)\right]=\frac{(z-\alpha)^2}{a^2}$$

или

$$x^2+y^2-R^2=\frac{(z-\alpha)^2}{a}.$$

Отсюда получимъ:

$$\alpha=z\pm a\sqrt{x^2+y^2-R^2}$$

Вставивъ это значеніе въ уравненіе: $x\mathrm{Cos}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)+y\mathrm{Sin}\left(\frac{\alpha}{aR}\right)=R$, получимъ уравненіе винтообразной поверхности безъ параметра α:

$$x\mathrm{Cos}\left(\frac{z\pm a\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{aR}\right)+y\mathrm{Sin}\left(\frac{z\pm a\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{aR}\right)=R.$$

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.

Огибающія поверхностей и линій.

§ 53. *Огибающія поверхностей.* Пусть дано уравненіе съ параметромъ α:

$$F(x, y, z, \alpha)=0.$$

Уравненіе это представляетъ нѣкоторую поверхность, опредѣляемую значеніемъ α. Если дадимъ α приращеніе $\Delta\alpha$, получимъ смежную съ данной поверхность, имѣющую уравненіе:

$$F(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha)=0.$$

Найдемъ линію пересѣченія этой поверхности съ данной; для этого разлагаемъ ея уравненіе по степенямъ $\Delta\alpha$.

$$F(x, y, z, \alpha+\Delta\alpha)=F+\Delta\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\Delta\alpha^2\frac{\partial F}{\partial\alpha^2}+\ldots$$

Замѣтивъ, что $F=0$, перепишемъ уравненіе второй поверхности въ видѣ:

$$\Delta\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\Delta\alpha^2\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+\ldots\ldots=0,$$

или сокращая на $\Delta\alpha$ и переходя къ предѣлу:

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=0.$$

Совокупность уравненій:

$$F(x, y, z, \alpha)=0 \text{ и } \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha}=0 \ldots\ldots\ldots (50)$$

при перемѣнномъ α опредѣляетъ рядъ кривыхъ, образующихъ нѣкоторую поверхность; поверхность эта называется *огибающею* по отношенію къ поверхностямъ, изображаемымъ уравненіями вида: $F=0$; послѣднія же поверхности называются *огибаемыми*. Линія, опредѣляемая системой (50) при постоянномъ α носитъ названіе *характеристики* огибающей поверхности.

Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія характеристикъ есть *ребро возврата* огибающей поверхности. Оно имѣетъ уравненія:

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha}=0, \frac{\partial^2 F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2}=0 \ldots\ldots (51).$$

Огибающая поверхность и огибаемая имѣютъ въ данной точкѣ общую касательную. Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціентами уравненія касательной плоскости (19) въ данной точкѣ огибаемой поверхности служатъ частныя производныя по x, y и z ея уравненія, именно:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q, \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Чтобы найти соотвѣтствующіе коэффиціенты уравненія касательной къ огибающей поверхности, находитъ частныя производныя перваго изъ ея уравненій, считая и α за функцію x, y, z, получимъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Для исключенія α вставляемъ въ эти производныя $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$, опредѣленное изъ второго уравненія, т. е. нуль; замѣчаемъ, что онѣ дѣлаются равными производнымъ уравненія огибаемой поверхности. Слѣдовательно, уравненія обѣихъ касательныхъ тождественны.

§ 54. *Примѣры.* 1) Примѣромъ огибающей поверхности можетъ служить всякая разгибающаяся. Огибаемыми поверхностями являются въ этомъ случаѣ плоскости, характеристикой—прямая линія.

2) Положимъ, что огибаемыя поверхности—шары постояннаго радіуса R, выражающіеся уравненіями:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2.$$

Выразивъ β и γ черезъ α, напишимъ то же уравненіе въ видѣ:

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi(\alpha))^2+(z-\psi(\alpha))^2=R^2.$$

Присоединяя къ нему производную по α:

$$x-\alpha+(y-\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)+(z-\psi(\alpha))\psi'(\alpha)=0.$$

получимъ систему, опредѣляющую по исключеніи α, нѣкоторую *канальную, трубчатую* огибающую поверхность.

3) ***Найти поверхность облекающую пространство, проходимое шаромъ, центръ котораго движется по оси x, а радіусъ измѣняется, какъ ордината эллипса.***

Помѣстимъ въ плоскости xz (черт. 38) эллипсъ.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1; \quad y=0,$$

характеризующій измѣненіе радіуса шара. При положеніи центра шара въ точкѣ p на разстояніи $OP=\alpha$ отъ начала, радіусъ его $MP=z$ найдется изъ равенства:

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;$$

онъ будетъ:

$$z=R=b\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}.$$

Слѣдовательно, уравненіе шара, имѣющаго центръ въ $p(\alpha, 0, 0)$ есть:

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2).$$

Уравненіе огибающей найдется по исключеніи α изъ системы, состоящей изъ уравненія шара и его производной по α:

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2)$$

$$-(x-\alpha)=-\frac{b^2}{a^2}\alpha.$$

Получивъ изъ второго уравненія

$$\alpha=\frac{a^2x}{a^2+b^2},$$

вставляемъ это значеніе въ первое уравненіе и упрощаемъ его:

$$\frac{b^4x^2}{(a^2+b^2)^2}+y^2+z^2=b^2-\frac{a^2b^2x^2}{(a^2-b^2)^2}$$

$$\frac{b^2x^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}+y^2+z^2=b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Это уравненіе изображаетъ эллипсоидъ вращенія.

§ 55. ***Второй родъ огибающихъ поверхностей.***

Огибаемая поверхность можетъ имѣть уравненіе съ двумя произвольными параметрами.

$$F(x, y, z, \alpha, \beta)=0.$$

Въ этомъ случаѣ огибающая поверхность опредѣляется уравненіями:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta}=0.$$

§ 56. ***Огибающія плоскихъ кривыхъ.***

Если дана система плоскихъ кривыхъ уравненіемъ съ произвольнымъ параметромъ:

$$f(x, y, \alpha)=0,$$

то геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ кривыхъ есть ***огибающая кривая***, она опредѣляется уравненіями:

$$f(x, y, \alpha)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0.$$

§ 57. Примѣры. *1)* ***Найти огибающую прямой данной длины, концы которой скользятъ по осямъ координатъ.*** Уравненіе прямой имѣетъ видъ:

$$y=-\alpha x+\beta.$$

Начертимъ эту прямую, имѣющую длину $AB=\delta$ (черт. 39) въ одномъ изъ ея положеній, получимъ изъ ея уравненія, полагая послѣдовательно $x=0$ и $y=0$:

$$y=A0=\beta;\ x=0B=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Прямоугольный треугольникъ даетъ связь:

$$\sqrt{\beta^2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}=\delta,$$

откуда:

$$\beta=\frac{\delta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Уравненіе прямой принимаетъ видъ:

$$y=\alpha x+\frac{\delta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

оно содержитъ теперь только одинъ параметръ α. Продифференцировавъ уравненіе по α, получаемъ второе уравненіе системы, опредѣляющей огибающую

$$y=-\alpha x+\frac{\delta}{\sqrt{1+\alpha^2}},\quad 0=-x+\frac{\delta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\frac{\delta\alpha^2}{(\sqrt{1+\alpha^2})^3}.$$

Параметръ α можетъ быть исключенъ; преобразуемъ второе уравненіе и опредѣляемъ изъ него α:

$$-x+\frac{\delta(1+\alpha^2)-\delta\alpha^2}{(\sqrt{1+\alpha^2})^3}=0;\quad -x+\frac{\delta}{(\sqrt{1+\alpha^2})^3}=0$$

$$\alpha=\sqrt{\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1}.$$

Подставляемъ это значеніе въ первое уравненіе:

$$y=-x\sqrt{\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1}+\delta\sqrt{\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1}\cdot\left(\frac{\delta}{x}\right)^{1/3}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1}\cdot\left(-x+\delta^{2/3}x^{1/3}\right).$$

$$y=x\sqrt{\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1}\left[\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1\right]=x\left[\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1\right]^{3/2}.$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}=\left(\frac{\delta}{x}\right)^{2/3}-1$$

$$x^{2/3}+y^{2/3}=\delta^{2/3}.$$

Полученное уравненіе представляетъ развертку эллипса (§ 29).

2) ***Найти огибающую эллипса, измѣняющагося такъ, что сумма осей остается постоянной.***

Положемъ, что сумма измѣняющихся полуосей α и β есть δ:

$$\alpha+\beta=\delta.$$

Уравненіе элипса имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Опредѣливъ β изъ перваго равенства, вставляемъ во второе:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{(\delta-\alpha)^2}=1.$$

Присоединяя къ этому уравненію его производную по α, получимъ систему.

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{(\delta-\alpha)^2}=1;\ -\frac{x^2}{\alpha^3}+\frac{y^2}{(\delta-\alpha)^3}=0,$$

изъ которой, по исключеніи α, получимъ уравненіе огибающей. Изъ второго уравненія находимъ:

$$\frac{y^{2/3}}{\delta-\alpha}=\frac{x^{2/3}}{\alpha};\ y^{2/3}\alpha=\delta x^{2/3}-\alpha x^{2/3};\ \alpha=\frac{\delta x^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}}$$

$$\delta-\alpha=\delta-\frac{\delta x^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}}=\frac{\delta y^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}}.$$

Вставляемъ полученныя выраженія въ первое уравненіе:

$$\frac{x^2(x^{2/3}+y^{2/3})^2}{\delta^2x^{4/3}}+\frac{y^2(x^{2/3}+y^{2/3})^2}{\delta^2y^{4/3}}=1;\ (x^{2/3}+y^{2/3})^2\left(\frac{x^{2/3}}{\delta^2}+\frac{y^{2/3}}{\delta^2}\right)=1.$$

$$x^{2/3}+y^{2/3}=\delta^{2/3}.$$

Получилась опять развертка эллипса.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.

Особыя точки плоскихъ кривыхъ.

§ 58. *Понятіе объ особыхъ точкахъ. Особыми точками называются такія точки кривой, свойства которыхъ не зависятъ отъ выбора осей координатъ.*

Существуетъ другое опредѣленіе, по которому особыми точками называются точки, касательныя въ которыхъ не имѣютъ опредѣленнаго положенія, то есть первая производная неопредѣленна. Но это опредѣленіе не исчерпываетъ собою всѣхъ видовъ особыхъ точекъ.

Мы будемъ разсматривать особыя точки только алгебраическихъ кривыхъ.

§ 59. *Точки перегиба. Точками перегиба (points d'inflexion) называются точки, въ которыхъ кривая мѣняетъ направленіе кривизны.*

Другими словами, по одну сторону точки перегиба кривая имѣетъ видъ , по другую (черт. 40). Такъ какъ тѣмъ или другимъ расположеніемъ кривой обусловливается знакъ плюсъ или минусъ второй производной, то въ точкѣ перегиба знакъ второй производной переходитъ съ плюса на минусъ или наоборотъ. Перемѣна знака производной можетъ совершиться только прохожденіемъ ея черезъ нуль или черезъ безконечность. *Итакъ, для точки перегиба вторая производная равна или нулю, или безконечности*, слѣдовательно, *радіусъ кривизны равенъ безконечности или нулю* (*38''*). Кругъ кривизны при безконечно-большомъ радіусѣ обращается въ касательную, которая пересѣкаетъ кривую въ точкѣ перегиба.

Если до точки перегиба вторая производная отрицательна, а послѣ точки перегиба — положительна, то до этой точки первая производная убываетъ, послѣ — возрастаетъ; слѣдовательно, въ точкѣ перегиба она имѣетъ minimum. Если же вторая производная переходитъ съ плюса на минусъ, первая производная переходитъ отъ возрастанія къ убыванію, т. е. имѣетъ свой Maximum. Черт. 40 и 41 иллюстрируютъ оба случая.

§ 60. *Примѣры*. 1) Разсмотримъ функцію:

$$y = b+(x-a)^{3/5}.$$

Находимъ первую и вторую производныя:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{5}\frac{1}{(x-a)^{2/5}};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{5}\right)\frac{1}{(x-a)^{7/5}}.$$

Приравнявъ вторую производную нулю, получимъ: $x=\infty$; приравнявъ ее безконечности, имѣемъ: $x=a$.

Итакъ, данная кривая имѣетъ въ конечной части плоскости точку перегиба съ абсциссой a. Остается разсмотрѣть, какой видъ имѣетъ кривая въ точкѣ перегиба. Вторая производная при $x<a$ положительна, при $x>a$ отрицательна, т. е. переходитъ съ плюса на минусъ; слѣдовательно, въ точкѣ перегиба первая производная имѣетъ Maxim. Этотъ Maxim. можно найти, подставивъ въ выраженіе первой производной $x=a$; онъ равенъ ∞.

2) Изслѣдуемъ относительно точекъ перегиба *синусоиду*:

$$y=\mathrm{Sin}\,x.$$

Приравниваемъ нулю вторую производную:

$$-\mathrm{Sin}\,x=0.$$

Отсюда:

$$x=0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots, -\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots\ldots$$

Получилось безконечное множество точекъ перегиба, именно, всѣ точки пересѣченія синусоиды съ осью x.

Чтобы найти значенія первой производной въ точкахъ перегиба, вставляемъ въ ея выраженіе:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{Cos}x$$

полученныя значенія x; получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{Cos}n\pi=\pm 1.$$

Такъ какъ первая производная равна тангенсу угла касательной съ осью x, то изъ полученнаго равенства заключаемъ, что этотъ уголъ въ точкахъ перегиба $=\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

§ 61. *Кратныя точки. Кратными точками (point multiples) называются точки пересѣченія нѣсколькихъ вѣтвей одной кривой.* Точки, въ которыхъ пересѣкаются двѣ вѣтви (A на черт. 43) називаются *двукратными*, или *двойными;* точки пересѣченія трехъ вѣтвей (B) носятъ названіе *трехкратныхъ* или *тройныхъ* и т. д. Кратныя точки образуются не только пересѣченіемъ вѣтвей, но и касаніемъ. Для нахожденія кратныхъ точекъ пользуются тѣмъ, что въ нихъ *существуетъ въ общемъ случаѣ нѣсколько касательныхъ* (черт. 44). Если уравненіе кривой есть:

$$f(x, y)=0,$$

то продифференцировавъ его, получимъ для опредѣленія тангенса угла касательной, равнаго $\frac{dy}{dx}$, уравненіе.

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

откуда,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Такъ какъ полученное выраженіе не зависитъ отъ корней какихъ-либо уравненій, то оно можетъ имѣть нѣсколько значеній только, если числитель и знаменатель его нули, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Итакъ, частныя производныя *для кратныхъ точекъ равны нулю*[1]). Равенство нулю частныхъ производныхъ необходимо, чтобы точка была кратною, но не достаточно: нужно еще, чтобы опредѣленныя изъ этихъ равенствъ значенія координатъ удовлетворяли уравненію кривой; поэтому, подставляемъ поочередно системы значеній x и y въ уравненіе кривой и отбираемъ удовлетворяющія ему. Чтобы опредѣлить $\frac{dy}{dx}$, которое, какъ мы уже видѣли, не можетъ быть найдено изъ перваго дифференціала, обратимся къ второму; второй дифференціалъ пишется такъ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx.dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0.$$

Замѣтивъ, что $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ и раздѣливъ все на dx^2, можемъ написать:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

Если полученное уравненіе даетъ два дѣйствительныя значенія $\frac{dy}{dx}$, что бываетъ въ случаѣ, когда $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$, т. е.

---

[1]) Болѣе строгое доказательство: Уравненіе

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}=0$$

должно удовлетворяться двумя разными значеніями $\frac{dy}{dx}$, положимъ, k и l, т. е. мы должны имѣть тождества:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}k=0; \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}.l=0.$$

Вычтя одно изъ другого, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(k-l)=0,$$

откуда, такъ какъ $k\neq l$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

а также, слѣдовательно, и $\frac{\partial f}{\partial x}=0$.

когда существуютъ два направленія касательной,—*точка двукратная;* случай мнимыхъ корней разсмотримъ впослѣдствіи; если корни неопредѣленные, для чего необходимо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

обращаемся къ третьему дифференціалу, который покажетъ намъ, что точка или трехкратная, или не кратная, или высшей кратности, въ послѣднемъ случаѣ для опредѣленія кратности обращаемся къ слѣдующимъ дифференціаламъ.

§ 62. Точками возврата (points de rebroussement) называются точки, въ которыхъ двѣ вѣтви кривой оканчиваются, имѣя общую касательную. Возвратъ бываетъ двоякаго рода:

1) Вѣтви идутъ по разныя стороны касательной (черт. 45); точка называется *кератоидой, рогообразной точкой возврата перваго рода.*

2) Вѣтви идутъ по одну сторону касательной (черт. 46): точка имѣетъ названіе *ромфоиды, клювообразной, точки возврата второго рода.*

Очевидно, что *точка возврата двукратна.*

Такъ какъ касательная въ ней имѣетъ одно направленіе, то *корни второго дифференціала должны быть* равны; слѣдовательно, для точекъ возврата $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

Въ случаѣ точки возврата можетъ возникнуть сомнѣніе, равны ли нулю частныя производныя: $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, такъ какъ мы вывели, что онѣ равны нулю въ предположеніи, что существуютъ двѣ различныя касательныя, что не имѣетъ мѣста для точекъ возврата. Оказывается, что онѣ равны нулю и для точекъ возврата. Дѣйствительно, въ такой точкѣ существуетъ соприкосновеніе двухъ вѣтвей, положимъ, n-аго порядка. Продифференцировавъ уравненія кривой $n+1$ разъ, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+\psi\left(x,y,\ \frac{dy}{dx},\ldots\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0.$$

Всѣ производныя, кончая n-ой, равны для обѣихъ вѣтвей, вслѣдствіе ихъ соприкосновенія; $(n+1)$-ыя производныя различны; положимъ, что онѣ равны k,l. Обозначивъ черезъ p часть равенства, содержащую первыя n производныхъ, напишемъ для обѣихъ вѣтвей:

$$\frac{\partial f}{\partial x}K+P=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}+P=0.$$

Такъ какъ K и L различны, то отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Подставивъ это значеніе $\frac{\partial f}{\partial y}$ въ равенство: $\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0.$$

§ 63. *Примѣръ.* Дана кривая: $y=x^2-x^{5/2}$.

Прежде всего приводимъ уравненіе къ раціональному виду:

$$(y-x^2)^2-x^5=0.$$

Составляемъ частныя производныя:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-4(y-x^2)x-5x^4; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2(y-x^2);$$

приравнявъ ихъ нулю, найдемъ безъ труда корни:

$$x=0, \; y=0.$$

Эти значенія координатъ удовлетворяютъ уравненію кривой: слѣдовательно, точка лежитъ на кривой и можетъ быть изслѣдуема относительно кратности. Найдемъ теперь коэффиціенты второго дифференціала уравненія:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4(y-x^2)+8x^2-20x^3;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=-4x;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

Для изслѣдуемой точки (0.0) они получаютъ значенія:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}=0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

Наконецъ, составляемъ выраженіе, опредѣляющее видъ корней (дискриминантъ):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0-0.2=0.$$

Заключаемъ, что корни дѣйствительные, равные и потому точка (0.0) есть точка возврата.

§ 64. *Отдѣльныя точки.* Нѣкоторыя кривыя имѣютъ такъ называемыя отдѣльныя или *сопряженныя точки* (*points isolés, conjugués*). Названіе этого класса точекъ („отдѣльныя") ясно указываетъ на ихъ характеръ. Покажемъ на примѣрѣ, что такія точки дѣйствительно существуютъ и что для нихъ *второй диффереціалъ имѣетъ мнимые корни* $\frac{dy}{dx}$, т. е.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

Возьмемъ кривую третьяго порядка:

$$y^2 = (x-a)^2(y-b),$$

причемъ $b > a$. Для нея:

$$f(x,y) = y^2 - (x-a)^2(x-b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-a)(x-b) - (x-a)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y.$$

Приравнявъ нулю $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ находимъ корни полученныхъ такимъ образомъ уравненій:

$$x = a, \quad y = 0$$

$$x = \frac{a+2b}{3} \quad y = 0.$$

На кривой лежитъ только первая точка. Мы можемъ нанести ее на черт. 47 (точка A). Но изъ уравненія видно, что для абцисс меньшихъ, а также для абциссъ, большихъ a и меньшихъ b, ордината имѣетъ мнимыя значенія. Слѣдовательно, кривая состоитъ изъ вѣтви $C.D$ и отдѣльной точки A.

Убѣдимся теперь, что для точки A корни второго дифференціала мнимы. Имѣемъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2(x-b) - 2(x-a) - 2(x-a) = -6x + 4a + 2b.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Для данной точки $(a,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(b-a); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Слѣдовательно:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - 2.2(b-a) = -4(b-a)$$

Такъ какъ $b>a$, то

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

и потому корни мнимы.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ.

Кривизна поверхностей.

§ 65. *Объ опредѣленіи кривизны поверхностей.* Вопросъ о кривизнѣ линій мы разсматривали въ связи съ теоріей соприкосновеній: находили радіусъ круга, имѣющаго съ данною кривою соприкосновеній: находили радіусъ круга, имѣющаго съ данною кривою соприкосновеніе второго порядка. Что касается поверхностей, то этотъ методъ, какъ сейчасъ увидимъ, къ нимъ не приложимъ. Дѣйствительно для соприкосновенія нулевого порядка (пересѣченія) двухъ поверхностей: $z=f(x,y)$ и $Z=F(X,Y)$, нужно, чтобы при $X=x$, $Y=y$ и $Z=z$. Для соприкосновенія перваго порядка необходимо, кромѣ того, чтобы:

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial X}\right]_{\substack{X=x\\Y=y}} = \frac{\partial z}{\partial x}\qquad \left[\frac{\partial Z}{\partial Y}\right]_{\substack{X=x\\Y=y}} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Въ случаѣ соприкосновенія второго порядка присоединяются условія:

$$\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\right]_{\substack{X=x\\Y=y}} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial X\partial Y}\right]_{\substack{X=x\\Y=y}} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\quad \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\right]_{\substack{X=x\\Y=y}} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Такимъ образомъ для соприкосновенія второго порядка существуютъ *шесть* условій. Сфера, которою естественно было бы воспользоваться для опредѣленія радіуса кривизны поверхностей, опредѣляется *четырьмя* параметрами и потому удевлетворять шести условіямъ не можетъ. Пользоваться-же какою-нибудь другою поверхностью было бы сложно и неудобно. Вслѣдствіе изложеннаго, для опредѣленія кривизны поверхности пользуются совершенно инымъ путемъ, состоящимъ въ опредѣленіи кривизны поверхности *кривизною ея нормальныхъ сѣченій.* Переходимъ къ изложенію этого метода.

§ 66. *Радіусъ кривизны сѣченія.* Для удобства изслѣдованія выберемъ систему координатъ такъ, чтобы ось z была нормалью въ нѣкоторой точкѣ поверхности 0, а плоскость xy касательной въ этой точкѣ. Положимъ, что при такомъ выборѣ координатной системы поверхность имѣетъ уравненіе: $z=f(x,y)$.

Пусть OC и OB (черт. 48) линіи пересѣченія ея плоскостями zx и yz. Разсмотримъ сѣченіе OC данной поверхности нормальною плоскостью, проходящей черезъ ось z и составляющей уголъ φ съ плоскостью xz. Примемъ эту плоскость за плоскость xz, проведемъ перпендикулярную къ ней плоскость yz и отнесемъ данную поверхность къ новой системѣ координатъ. Формулы преобразованія будутъ:

$$x=x'\mathrm{Cos}(xx')+y'\mathrm{Cos}(xy')=x'\mathrm{Cos}\varphi-y'\mathrm{Sin}\varphi$$
$$y=x'\mathrm{Cos}(x'y)+y'\mathrm{Cos}(y'y)=x'\mathrm{Sin}\varphi+y'\mathrm{Cos}\varphi.$$

Уравненіе поверхности приметъ видъ.

$$z=f(x'\mathrm{Cos}\varphi-y'\mathrm{Sin}\varphi,\ x'\mathrm{Sin}\varphi+y'\mathrm{Cos}\varphi).$$

Положивъ $y'=0$, найдемъ уравненія OC:

$$z=f(x'\mathrm{Cos}\varphi,\ x'\mathrm{Sin}\varphi).$$

Найдемъ теперь радіусъ кривизны этого сѣченія.

Онъ выразится формулой (28 и 28''):

$$\rho=\frac{ds^3}{dx'd^2z'}=\frac{\left[1+\left(\frac{dz}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2z}{dx'^2}}$$

или, для даннаго случая (при двухъ независимыхъ перемѣнныхъ).

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dz}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2z}{dx'^2}}$$

Находимъ $\frac{dz}{dx'}$. Такъ какъ x' есть функція x, y, то

$$\frac{dz}{dx'}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dx'}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx'}=p\mathrm{Cos}\varphi+q\mathrm{Sin}\varphi$$

Вторая производная по x' будетъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}=\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial z}{\partial x'}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(p\operatorname{Cos}\varphi+q\operatorname{Sin}\varphi)\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y}(p\operatorname{Cos}\varphi+q\operatorname{Sin}\varphi)\frac{\partial y}{\partial x'}=$$

$$=(r\operatorname{Cos}\varphi+s\operatorname{Sin}\varphi)\operatorname{Cos}\varphi+(s\operatorname{Cos}\varphi+t\operatorname{Sin}\varphi)\operatorname{Sin}\varphi=$$

$$=r\operatorname{Cos}^2\varphi+2s\operatorname{Sin}\varphi\,.\operatorname{Cos}\varphi+t\operatorname{Sin}^2\varphi,$$

гдѣ:

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,.\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Прежде чѣмъ подставлять полученныя значенія производныхъ въ выраженіи радіуса вектора, обратимъ вниманіе на то, что плоскость xy касается поверхности въ началѣ координатъ. Уравненіе касательной плоскости (22)

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0$$

для точки поверхности $0(X=0,\ Y=0,\ Z=0)$ принимаетъ видъ:

$$-px-qy-z=0.$$

Оно должно обратиться тождественно въ уравненіе плоскости xy $(z=0)$. Отсюда слѣдуетъ, что $p=0$ и $q=0$. Итакъ,

$$\frac{\partial z}{\partial x'}=0.$$

Совершаемъ подстановку и получаемъ слѣдующее выраженіе радіуса кривизны:

$$\rho=\frac{1}{r\operatorname{Cos}^2\varphi+2s\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi+t\operatorname{Sin}^2\varphi}\,\ldots\ldots(52)$$

Раздѣлимъ числителя и знаменателя на $\operatorname{Cos}^2\varphi$ и замѣнимъ $\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\varphi}$ въ числителѣ, равной величиной: $1+tg^2\varphi$:

$$\rho=\frac{1+tg^2\varphi}{r+2stg\varphi+ttg\varphi}.$$

Положивъ $tg\varphi=\alpha$, получимъ выраженіе радіуса кривизны сѣченія въ слѣдующемъ видѣ:

$$\rho=\frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}\,\ldots\ldots\ldots(52')$$

§ 67. *Главныя сѣченія.* Проводя всевозможныя нормальныя плоскости черезъ данную точку поверхности, мы будемъ получать сѣченія, имѣющія въ общемъ случаѣ различные радіусы кривизны. Естественно ожидать, что радіусъ кривизны будетъ имѣть одно или нѣсколько *максимальныхъ и минимальныхъ значеній.* Посмотримъ, какимъ сѣченіямъ соотвѣтствуютъ эти значенія. Прежде всего мы должны приравнять нулю производную ρ по α, находимъ эту производную:

$$\frac{d\rho}{d\alpha}=\frac{2(r+2s\alpha+t\alpha^2)\alpha-2(1+\alpha^2)(s+t\alpha)}{(r+2s\alpha+t\alpha^2)^2}=\frac{2[s\alpha^2+(r-t)\alpha-s]}{(r+2s\alpha+t\alpha^2)^2}.$$

Приравнявъ нулю числитель, получимъ уравненіе:

$$s\alpha^2+(r-t)\alpha-s=0,$$

изъ котораго найдутся значенія α, соотвѣтствующія Max. и min. Это уравненіе имѣетъ два корня:

$$\alpha'=\frac{-(r-t)+\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{2s},\ \alpha''=\frac{-(r-t)-\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{2s}.$$

Слѣдуя общей теоріи наибольшихъ величинъ, мы должны были бы обратиться теперь ко второй производной: знакъ ея позволилъ бы отличить Max. отъ min. Но мы можемъ проще достигнуть цѣли, воспользовавшись свойствами трехчлена второй степени. Извѣстно, что для значеній перемѣннаго, заключающихся между корнями, трехчленъ отрицателенъ, для остальныхъ значеній положителенъ: (это вполнѣ очевидно, если трехчленъ разложить, привести къ виду: $(x-\alpha')(x-\alpha'')$. Знакъ производной $\frac{d\rho}{d\alpha}$ зависитъ только отъ знака трехчлена $s\alpha^2+(r-t)\alpha-s$, такъ какъ въ знаменателѣ квадратъ. Слѣдовательно, при значеніяхъ α, меньшихъ α'', производная положительна; при $\alpha=\alpha''$ равна нулю; при $\alpha>\alpha''$ становится отрицательна. Соотвѣтствующая ей функція ρ при $\alpha<\alpha''$ возрастаетъ, при $\alpha>\alpha''$ начинаетъ убывать; слѣдовательно, при $\alpha=\alpha''$ ρ есть Max. Когда α дѣлается больше α', $\frac{d\rho}{d\alpha}$ становится опять положительнымъ, слѣдовательно, ρ начинаетъ возрастать и при $\alpha=\alpha'$ есть min.

Приходимъ къ слѣдующему выводу: въ каждой точкѣ поверхности, выражаемой уравненіемъ, если только эта точка не особая, существуютъ два нормальныхъ сѣченія, одно изъ которыхъ имѣетъ радіусъ кривизны maximum, другое min. Эти сѣченія называются главными. Значенія α, опредѣляющія направленія главныхъ сѣченій, представляютъ пару корней уравненія:

$$s\alpha^2+(r-t)\alpha-s=0.$$

По свойству корней квадратнаго уравненія $(x_1 x_2 - q)$: $\alpha'\alpha'' = -1$, или

$$tg\varphi' . tg\varphi'' = -1.$$

Полученное равенство показываетъ, что *главныя сѣченія взаимно перпендикулярны*.

§ 68. *Радіусы кривизны главныхъ сѣченій.* Займемся опредѣленіемъ величины главныхъ радіусовъ кривизны: $\rho_{min} = R'$ и $\rho_{max} = R''$. Представимъ формулу (52) въ видѣ:

$$\rho = \frac{\frac{1}{\alpha} + \alpha}{\frac{2}{\alpha} + 2s + t\alpha}.$$

Подставивъ α' и α'', получимъ величину R' и R''. Но такъ какъ α' и α'' разнятся только знакомъ при корнѣ, то и выраженія R' R'' будутъ имѣть только ту же разницу. Въ виду этого, достаточно получить подстановкой выраженіе только одного радіуса кривизны, напримѣръ R', другой найдемъ, перемѣнивъ знакъ передъ корнемъ:

Вычислимъ отдѣльно $\frac{1}{\alpha'}$.

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{2s}{-(r-t)+\sqrt{(r-t)^2+4s^2}} = \frac{2s[(r-t)+\sqrt{(r-t)^2+4s^2}]}{4s^2} =$$

$$= \frac{r-t+\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{2s}.$$

Вставляемъ теперь формулу α' и $\frac{1}{\alpha'}$ въ формулу ρ:

$$\rho_{min} = R' = \frac{2\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{\frac{2s[(r-t)r+r\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{2s}+2s+}$$

$$+\frac{-t(r-t)+t\sqrt{(r-t)^2+4s^2}]}{2s} = \frac{2\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}{(r-t)^2+4s^2+(r+t)\sqrt{(r-t)^2+4s^2}} =$$

$$= \frac{2}{(r+t)+\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}.$$

Перемѣнивъ знакъ радикала, имѣемъ

$$\rho_{max} = R'' = \frac{2}{(r+t)-\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}.$$

Полученные результаты можемъ представить общей формулой:

$$R=\rho=\frac{2}{(r+t)\pm\sqrt{(r-t)^2+4s^2}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(53)$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобно имѣть уравненіе второй степени, корнями котораго служатъ R' и R''.

Такое уравненіе не трудно составить, пользуясь равенствомъ (53). Изъ этого равенства получимъ:

$$(r+t)R\pm R\sqrt{(r-t)^2+4s^2}=2.$$

Освобождаемъ отъ корня и располагаемъ уравненіе по степенямъ R:

$$[(r+t)R-2]^2=R^2[(r-t)^2+4s^2];\; (r+t)^2R^2-4(r+t)R+4=$$
$$=(r-t)^2R^2+4s^2R^2.$$
$$4(rt-s^2)R^2-4(r+t)R=-4;\; (rt-s^2)R^2-(r+t)R=-1\ldots\ldots(54).$$

Изъ этого уравненія опредѣляются оба главныя значенія R.

§ 69 *Соотношеніе между кривизною взаимно перпендикулярныхъ сѣченій* Отнесемъ поверхность къ системѣ координатъ, плоскость xy которой касается поверхности въ началѣ координатъ, а плоскости xz и yz совпадаютъ съ плоскостями главныхъ сѣченій

При этихъ условіяхъ: $\varphi'=0$ и $\varphi''=\frac{\pi}{2}$, и потому:

$$\alpha'=0,\qquad \alpha''=\infty.$$

Чтобы уравненіе: $s\alpha^2+(r-t)\alpha-s=0$ имѣло такіе корни, надо чтобы коэффиціенты при α^2 и при α^0 были нули, т. е. чтобы:

$$s=0.$$

Формула (53) даетъ при этомъ условіи:

$$R'=\frac{1}{r};\qquad R''=\frac{1}{t}.$$

Возьмемъ теперь какую-нибудь другую систему взаимно-перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій: zox', и zoy' (черт. 40), образующихся съ плоскостью xz углы φ и $\varphi+\frac{\pi}{2}$. По формулѣ (52):

$$\rho'=\frac{1}{r\mathrm{Cos}^2\varphi+2s\mathrm{Sin}\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\varphi+t\mathrm{Sin}\varphi}$$

$$\rho''=\frac{1}{r\mathrm{Cos}^2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+2s\mathrm{Sin}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+t\mathrm{Sin}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Такъ какъ $s=0$, то:

$$\rho'=\frac{1}{r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi};\qquad \rho''=\frac{1}{r\sin^2\varphi+t\cos^2\varphi}.$$

Напишемъ обратныя дроби $\frac{1}{\rho'}$ и $\frac{1}{\rho''}$ и вставимъ выраженія r и t черезъ R' и R'':

$$\frac{1}{\rho'}=r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{R'}+\frac{\sin^2\varphi}{R''};\quad \frac{1}{\rho''}=r\sin^2\varphi+t\cos^2\varphi=$$

$$=\frac{\sin^2\varphi}{R'}+\frac{\cos^2\varphi}{R''}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (55).$$

Сложивъ полученныя значенія $\frac{1}{\rho'}$ и $\frac{1}{\rho''}$ будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}=\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{R'}+\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{R''}=\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\ \ldots\ldots\ (56).$$

Дроби $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{R}$ выражають *кривизну сѣченій.* Поэтому полученный результатъ словами можетъ быть выраженъ такъ: сумма кривизнъ всякихъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій въ данной точкѣ есть величина постоянная, равная суммѣ кривизнъ главныхъ сѣченій.

Итакъ, кривизна въ данной точкѣ поверхности характеризуется суммою кривизнъ главныхъ сѣченій.

§ 70. ***Изслѣдованіе кривизны поверхности.*** Для изслѣдованія кривизны поверхности болѣе удобно нѣсколько иное выраженіе радіуса кривизны, чѣмъ (53). Это выраженіе получимъ преобразовавъ подкоренное количество:

$$(r-t)^2+4s^2=r^2-2rt+t^2+4s^2+4rt-4rt=(r+t)^2-4(rt-s^2).$$

Итакъ, имѣемъ:

$$R=\frac{2}{r+t+\sqrt{(r+t)^2-4(rt-s^2)}}$$

Разсмотримъ слѣдующіе случаи:

1) $rt-s^2>0$. Въ этомъ случаѣ подкоренное выраженіе меньше $(r+t)^2$, корень меньше $r+t$, обозначенія R по знаку одинаковы. Послѣднее показываетъ, что главные радіусы кривизны направлены въ одну и ту же сторону. Такъ какъ этимъ радіусамъ соотвѣтствуетъ максимальная и минимальная кривизна, то радіусы

кривизны всѣхъ другихъ сѣченій направлены въ ту же сторону. т. е. *поверхность выпуклая.*

2) $rt-s^2<0$. При этомъ условіи R' и R'' по знаку различны, т. е. радіусы кривизны главныхъ сѣченій направлены въ разныя стороны: *поверхность сѣдлообразная*

3) $rt-s^2=0$. Одинъ радіусъ имѣетъ нѣкоторое конечное значеніе: другой равенъ безконечности, т. е. поверхность содержитъ въ извѣстномъ направленіи элементъ, совпадающій съ прямой линіей. Если всѣ точки поверхности обладаютъ этимъ свойствомъ, *поверхность разгибающаяся.*

Въ равенствѣ: $rt-s^2=0$ узнаемъ дифференціальное уравненіе разгибающейся поверхности (47).

§ 71. Линіи кривизны. Возьмемъ на нѣкоторой поверхности точку $M(x, y, z)$ и посмотримъ, нельзя ли найти такую смежную точку M', нормаль въ которой пересѣкаетъ нормаль въ M. Напишемъ уравненія нормали въ точкѣ M (25):

$$X-x+p(Z-z)=0; \qquad Y-y+q(Z-z)=0$$

или (24). Чтобы получить уравненія нормали въ смежной точкѣ M', мы должны продифференцировать эти уравненія (ср. § 46), получимъ:

$$-dx-pdz+(Z-z)dp=0; \quad -dy-qdz+(Z-z)dq=0,$$

или

$$dx+pdz=(Z-z)(rdx+sdy): dy+qdz=(Z-z)(sdx+tdy).$$

Отсюда:

$$\frac{dx+pdz}{dy+qdz}=\frac{rdx+sdy}{sdx+tdy}.$$

Замѣтивъ, что:

$$dz=pdx+qdy.$$

переписываемъ полученное равенство въ видѣ:

$$\left[dx(1+p^2)+pqdy\right]\left[sdx+tdy\right]=\left[rdx+sdy\right]\left[pqdx+(1+q^2)dy\right]$$

Послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій приведемъ его къ виду.

$$\left[(1+q^2)s-pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]\frac{dy}{dx}-$$
$$-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0 \ldots \ldots \ldots (57).$$

Равенство это при данныхъ значеніяхъ координатъ, какъ полученное путемъ исключенія x, y, z изъ четырехъ уравненій двухъ нормалей, служитъ условiемъ пересѣченія этихъ нормалей. При перемѣнныхъ x, y, z оно служитъ дифференціальнымъ уравненіемъ геометрическаго мѣста нормалей, пересѣкающихъ данную. Такъ какъ уравненіе это второй степени относительно $\frac{dy}{dx}$, то въ плоскости, параллельной xy существуютъ въ данной точкѣ *двѣ* касательныхъ къ геометрическому мѣсту y Послѣднее обстоятельство указываетъ на то, что *смежныя нормали, пересѣкающія данную, существуютъ по двумъ направленіямъ*, т. е. ихъ четыре. Для каждой изъ этихъ нормалей мы получимъ въ свою очередь четыре пересѣкающихся съ ними смежныя, одною изъ которыхъ будетъ, конечно, начальная. Повторяя то же для каждой изъ полученныхъ нормалей, отмѣчая точки пересѣченія ихъ съ поверхностью и соединяя точки, соотвѣтствующія пересѣкающимся нормалямъ, получимъ сѣть линій, называемыхъ *линіями кривизны*. Способъ, которымъ онѣ получены, показываетъ, что *черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ линіи кривизны*. Линіи эти представляютъ собою кратчайшія разстоянія между смежными точками и называются также *геодезическими*. Для болѣе удобнаго изслѣдованія свойствъ линій кривизны, отнесемъ поверхность къ такой системѣ координатъ, плоскость xy которой касается поверхности въ началѣ. При этомъ (§ 66): $p=0$, $q=0$.

Уравненіе (57) принимаетъ видъ:

$$s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(r-t)\frac{dy}{dx}-s=0.$$

Вспомнивъ уравненіе, опредѣлившее главныя сѣченія (§ 67): $s\alpha^2+(r-t)\alpha-s=0$, заключимъ, что $\frac{dy}{dx}=\alpha=tg\varphi$.

Такъ какъ $\frac{dy}{dx}$ представляетъ собою тангенсъ угла съ осью x проекціи на плоскость xy касательной въ данной точкѣ къ линіи кривизны, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что этотъ уголъ есть φ, т. е. *линіи кривизны лежатъ въ главныхъ сѣченіяхъ*.

§ 72. Приложеніе свойства линіи кривизны къ опредѣленію радіуса кривизны главныхъ сѣченій. Пользуясь только-что выведеннымъ свойствомъ, мы можемъ вычислить радіусы кривизны главныхъ сѣченій. Уравненія нормали въ точкѣ $M(x, y, z)$ суть:

$$X-x+p(Z-z)=0, \qquad Y-y+q(Z-z)=0.$$

уравненія смежной нормали:

$$dx+pdz-(Z-z)(rdx+sdy)=0,\ dy+qdz-(Z-z)(sdx+tdy)=0$$

Если эти нормали пересѣкаются, то онѣ лежатъ въ одномъ изъ главныхъ сѣченій и пересѣкаются въ его центрѣ кривизны. Координаты центра можемъ назвать x, y, z, такъ какъ онъ лежитъ на первой нормали. Въ такомъ случаѣ радіусъ будетъ:

$$R=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}.$$

Вставляя $X-x$ и $Y-y$ изъ уравненій первой нормали, получимъ:

$$R=(Z-z)\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Остается исключить координату Z центра кривизны. Для этого вставимъ въ уравненія второй нормали выраженіе дифференціала Z: $dz=pdx+qdy$; получится:

$$\left[1+p^2-(Z-z)r\right]dx=\left[(Z-z)s-pq\right]dy;$$
$$\left[1+q^2-(Z-z)t\right]dy=\left[(Z-z)s-pq\right]dx.$$

Перемноживъ эти равенства, по приведеніи, будемъ имѣть:

$$(rt-s^2)(Z-z)^2-\left[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r\right](Z-z)+1+p^2+q^2=0.$$

Выразивъ $(Z-z)$ черезъ R изъ выше полученнаго равенства, вставимъ въ уравненіе: $(rt-s^2)R^2-\left[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r\right]\sqrt{1+p^2+q^2}R+(1+p^2+q^2)=0$ . . . .(58).

Мы получили уравненіе, изъ котораго опредѣляются оба значенія R. Оно важно тѣмъ, что опредѣляетъ радіусы главныхъ сѣченій *при произвольно расположенной системѣ коодинатъ.*

Если же мы сдѣлаемъ осью Z нормаль, а плоскостью xy касательную въ той же точкѣ, то какъ мы видѣли $p=0$ и $q=0$, и уравненіе принимаетъ видъ: $(rt-s^2)R^2-(r+t)R+1=0$, т. е. обращается въ знакомое уже намъ уравненіе (54).

Указатель формулъ дифференціальнаго исчисленія.

Часть первая.								Часть вторая.			
Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§
1	5	12'	16	3	29	14a	36	24	4	36	15
2	7	13	16	4	29	15	36	25	5	37	15
3	9	14	17	5	30	16	38	26	6	38	16
4	10	15	17	6	31	16'	38	27	7	39a	30
5	11	16	17	7	31	17	38	28	8	39b	30
6	12	17	17	8	31	17'	38	29	9	39b'	30
7	13	18	18	9	31	18	39	30	10	40a	31
8	15	19	18	10	32	Часть 2-я.		31	11	40b	31
9	15	20	18	10'	32	19	3	31a	12	40c	31
9'	15	21	18	11	32	20	4	32	13	40c'	31
10	15	22	19	12	34	21	4	33	13	41	33
11	15	1	27	13	35	22	4	34	14		
12	16	2	28	14	36	23	4	35	14		

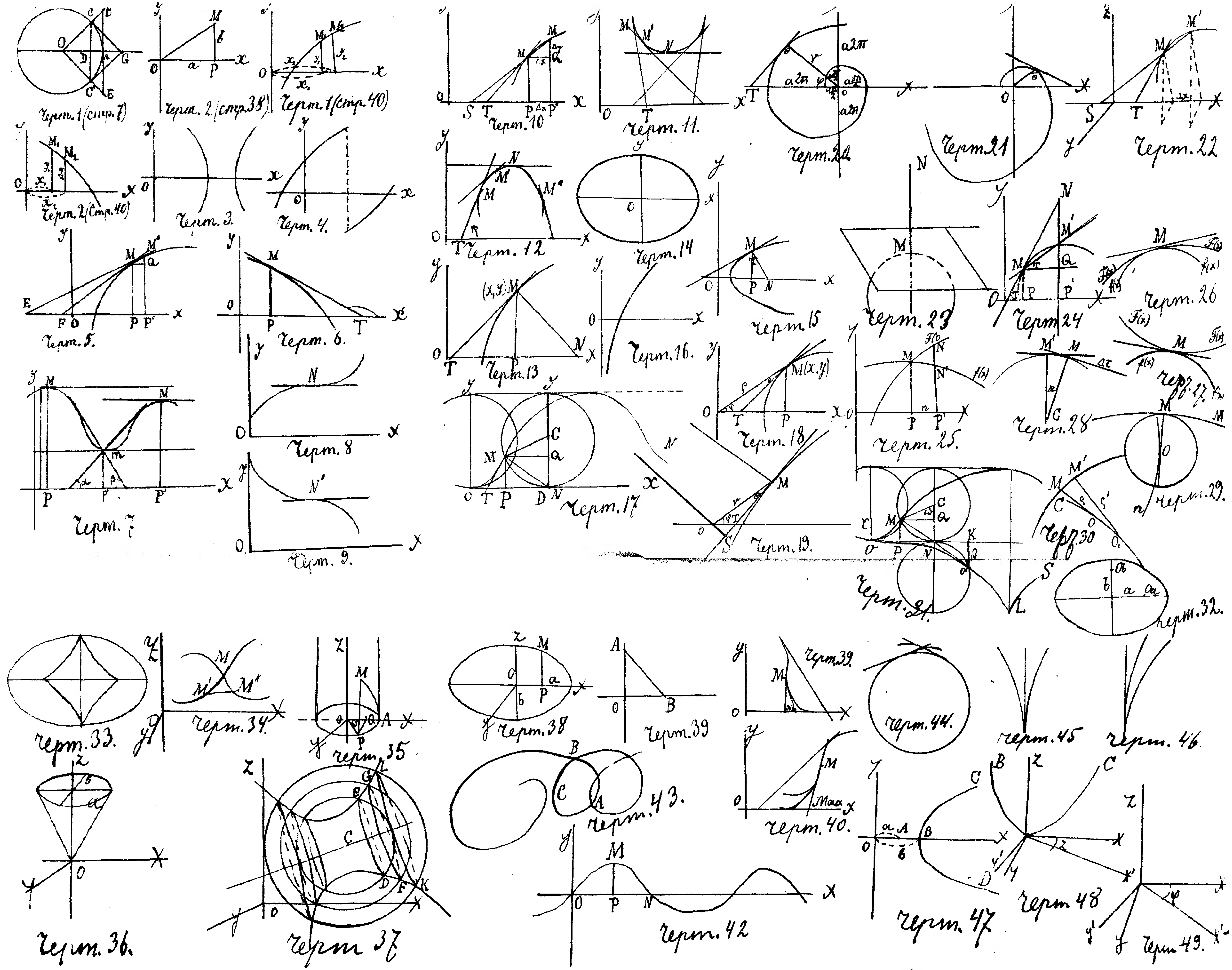
Часть третья.

Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§	Форм.	§
1	1	10	7	22	15	32a	25	42	36	49	47
2	1	11	7	23	15	32b	26	43	39	50	53
3	2	12	7	24	15	33	31	43a	39	51	53
3a	2	13	9	25	15	34	31	44	41	52	66
4	2	13a	9	26	16	34a	31	44a	41	52'	66
4a	2	14	9	27	17	35	31	45	43	53	68
5	2	15	10	28	20	36	33	45a	43	54	68
6	3	16	11	28'	20	37	34	45a'	44	55	69
6a	3	17	12	28''	20	38	34	45aa'	44	56	69
7	3	18	11	28'''	20	38a	34	45b	43	57	71
8	4	19	13	29	20	39	34	46	46	58	72
8'	4	20	14	30	22	40	34	47	47		
9	6	21	14	31	24	41	34	48	49		

ВАЖНѢЙШІЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
11	5 сверху	$\lim y x^{\lim y}$	$\lim e^{\lim y}$
16	6 снизу	$l=$	$e=$
18	5 »	u_1	u_2
18	8 »	u_{n+1}	u_{n-1}
25	8 и 10 сверху	a^2, u	n^2, n
29	8 снизу	$A\gamma + B = B$	$A\gamma + B = \beta$
31	14 »	i	$i^2 = 1$
47	10 сверху	$\frac{du}{dx}$	$\frac{dz}{dx}$
48	5 снизу	$\frac{dy}{dx} m x^{m-1}$	$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$
50	13 сверху	$\frac{dy}{dx} a^x \dots$	$\frac{dy}{dx} = a^x \dots$
51	7 »	l	e
51	12 »	$\frac{a^x}{L_2 e}$	$\frac{a^x}{L_2 e} dx$
51	14 »	$= e$	$= 1$
51	1 снизу	$L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^x$	$L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$
53	5 сверху	$\left(\frac{n}{2} - dx\right)$	$\left(d\frac{n}{2} - dx\right)$
53	10 снизу	$-\frac{\sin x \sin nx\, dx - \cos x \cos nx\, dx}{\sin n^2 x} =$	$-\frac{\sin x \sin nx\, dx + \cos x \cos nx\, dx}{\sin^2 x}$
55	2 »	$\varphi' d . dx$	$\varphi' x dx$
59	8 »	β^{n+1}	β^{n-1}

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
63	11 снизу	§ 20	§ 26
67	11 сверху	$\psi(\alpha+h)+\psi(\alpha)\ldots$	$\psi(\alpha+h)=\psi(\alpha)\ldots$
73	8 »	$d\dfrac{\partial T}{\partial w}$	$d\dfrac{\partial T}{\partial w}\partial w$
74	5 снизу	$h^m k^n f^{m+n}_{xmyn}$	$h^m k^n f^{m+n}_{x^m y^n}$
75	10 сверху	$2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,.\,\partial z}$	$2kl\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$
78.	10 снизу	∂y	∂y^2
89	4 »	$2\left[\dfrac{1}{2}+\ldots\right.$	$2\left[\dfrac{1}{3}+\ldots\right.$
90	2 »	$\dfrac{1}{1-x}\,1+x+\ldots$	$\dfrac{1}{1-x}=1+x+\ldots$
91	10 »	$un=$	$u_n=$
94	16 сверху	$A_2=$	$2A_2=$
96	1 снизу	e	e^{-ri}
102	9 сверху	вторая	первая
108	11 снизу	$\dfrac{0-0}{0-0}$	$\dfrac{0-0}{00}$
111	8 сверху	$\lim\left[\dfrac{F(x)}{x}\right]_{x=\infty}$ [lim...	$\lim\left[\dfrac{F(x)}{x}\right]_{x=\infty}=$ [lim...
112	8 »	maximum	minimum
118	13 »	$=\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}p^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial x}p+\ldots\right.$	$=\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}p^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}p+\ldots\right.$
120	15	$2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial x}$	$2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,.\,\partial z}$


черт. 1 (стр. 7)
черт. 2 (стр. 38)
черт. 1 (стр. 40)
черт. 10
черт. 11.
черт. 20
черт. 21
черт. 22
черт. 2 (стр. 40)
черт. 3.
черт. 4.
черт. 12
черт. 14
черт. 15
черт. 23
черт. 24
черт. 26
черт. 5.
черт. 6.
черт. 13
черт. 16.
черт. 18
черт. 25.
черт. 28
черт. 27
черт. 7
черт. 8
черт. 9.
черт. 17
черт. 19.
черт. 29.
черт. 30
черт. 31.
черт. 32.
черт. 33.
черт. 34.
черт. 35
черт. 38
черт. 39
черт. 39
черт. 44.
черт. 45
черт. 46
черт. 36.
черт. 37
черт. 43.
черт. 40.
черт. 42
черт. 47
черт. 48
черт. 49.